Valószínűségszámítás előadás II. éves programtervezőknek

2004/2005 2. félév

Zempléni András

zempleni@ludens.elte.hu

http://www.cs.elte.hu/~zempleni/

1. előadás: Bevezetés

- Irodalom, követelmények
- A félév célja
- Valószínűségszámítás tárgya
- Történet
- Alapfogalmak
- Valószínűségek kiszámítása

Irodalom

- Jegyzet
  - Baróti-Bognárné-Fejes Tóth-Mogyoródi: Valószínűségszámítás jegyzet programozó szakos hallgatóknak
- Tankönyvek:
  - Prékopa: Valószínűségelmélet
  - Solt: Valószínűségszámítás
  - Pál: A valószínűségszámítás és a statisztika alapjai I-II
- Példatár
  - Bognárné-Mogyoródi-Prékopa-Rényi-Szász: Valószínűségszámítási feladatgyűjtemény

Számonkérés

- Gyakorlatok
  - jelentkezés az ETR programmal (max. 30 fő csoportonként)
  - gyakorlati jegy: csoportonkénti zh-k alapján
  - Vizsga: írásbeli, később egyeztetendő időpontban

Cél

- Valószínűségszámítás alapjainak ismertetése
- Feladatmegoldási készség kialakítása (elsősorban gyakorlaton)
- Alkalmazási lehetőségek bemutatása
- Matematikai statisztika (következő félév) megalapozása

A valószínűségszámítás tárgya

- Köznapi kérdés lehetne: mennyi a valószínűsége, hogy egy adott személy 2 hónapon belül házasságot köt?
  - Helyzettől függ:
    - ha megvan az időpont, közel 100%
    - ha nincs kiszemelt, közel 0%
  - Azonban maga a kérdés sem helyes, mert egyszeri/ritka eseményről van szó

Véletlen tömegjelenségek

- Ismételhető/nagy számban végbemenő események (például: *X* éves férfi/nő mekkora valószínűséggel köt 2 hónapon belül házasságot)
- Véletlen: az ismert feltételrendszer nem határozza meg egyértelműen az eredményt (pl. kockadobás). Nem is érdemes determinisztikus modellel kisérletezni, mert túl bonyolult lenne.

Valószínűségszámítás helye a tudományok között

- Matematikai tudomány, mert precízen megfogalmazott axiómáxra épül.
- Gyakorlati alkalmazásai: statisztikai következtetések levonása (pl.: ha egy érmével 1000 dobásból 550 fej jött ki, akkor 99.9% valószínűséggel állítható, hogy az érme nem szabályos).

Modellezés

- Nem mindegy, hogy milyen valószínűségi modellt használunk: úgy kell megválasztani, hogy minél pontosabban leírja a vizsgálandó jelenséget.
- További szempontok:
  - Egyszerűség
  - Interpretálhatóság

Történeti áttekintés 1.

- Első ismert feladat 1494-ből: játék idő előtti abbahagyása esetén hogyan osztozzanak? Helyes megoldás több, mint 100 évvel későbbi: Pascal, Fermat
- Szimulációs megoldás (precíz számítás a gyakorlaton)
- Cardano (1540 körül) könyvet írt a kockajátékokhoz kapcsolódó valószínűségszámítási kérdésekről

Történeti áttekintés 2.

- de Mére lovag kérdése:
  - Egy kockával négyszer dobva előnyös arra fogadni, hogy lesz hatos, de 2 kockával 24-szer dobva már nem előnyös arra fogadni, hogy lesz (6,6) a dobások között.
  - Megoldás: Pascal, Fermat (1654)
- de Witt, Halley (1671): életjáradék-számítás valószínűségi alapon

Történeti áttekintés 3.

- Jacob Bernoulli (1713): Ars Conjectandi (nagy számok törvénye)
- XVIII-XIX. sz: Moivre, Bayes, Gauss, Poisson
- Buffon: geometriai valószínűség bevezetése – paradoxonok
- XIX.sz: Csebisev, Markov, Ljapunov

Történeti áttekintés 4.

- Axiomatizálás: Kolmogorov (1933)
- Modern alkalmazások:
  - Információelmélet (Shannon)
  - Játékelmélet (Neumann)
  - Matematikai statisztika (Fisher)
  - Sztochasztikus folyamatok
- Magyar tudósok:
  - Jordán Károly (1871-1959)
  - Rényi Alfréd (1921-1970)

Alapfogalmak

- Eseménytér
  - Kísérlet egy lehetséges kimenetele: elemi esemény, jelölése ω.
  - Elemi események összessége: eseménytér, Ω .
  - Ω részhalmazai: események (A,B,C,...).
  - Esemény akkor következik be, ha az őt alkotó elemi események valamelyike bekövetkezik.

Példák

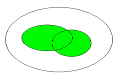
- Kockadobás: Ω={1,2,…,6}. Ha az A esemény: páros számot dobtunk, akkor A={2,4,6}.
- Érmét kétszer feldobva: $\Omega=\{II,IF,FI,FF\}$ $A=\{II,IF\}$ az az esemény, hogy az első dobás írás.
- Érmét addig dobunk, míg fejet nem kapunk. $\Omega=\{F,IF,IIF,...,\omega_\infty\}$ ahol $\omega_\infty=III\ldots.$ (azaz minden dobás írás)

Események

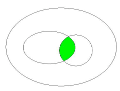
- Speciális események:
  - Ω (biztos esemény)
  - $\emptyset$ (lehetetlen esemény)
- Az események összessége: $\mathcal{A}$ (halmazrendszer Ω részhalmazaiból)
- Műveletek eseményekkel: szokásos logikai műveletek = halmazműveletek

Műveletek eseményekkel

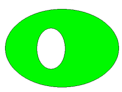
- $A \cup B$: vagy A vagy B bekövetkezik (az is lehet, hogy mindkettő)



- $A \cap B$: A és B is bekövetkezik

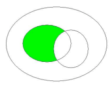


- A esemény ellentettje: $\overline{A}$



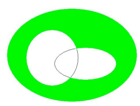
Tulajdonságok

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}$$



$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

(De Morgan)



$$\overline{\overline{A}} = A \qquad \overline{\Omega} = \emptyset$$

Példák

Kockadobás:

A={páros számot dobunk}

B={legalább 3-ast dobunk}

$A \cap B$={4,6}

$A \cup B$={2,3,4,5,6}

$A \setminus B$={2}

$\bar{A}$={1,3,5}

Valószínűség

Szemléletes megfelelője: *relatív gyakoriság*. Ha n egymástól függetlenül, azonos körülmények között végrehajtott kísérletből az adott A esemény k-szor következett be, akkor a relatív gyakoriság k/n.

Nagy n-re a relatív gyakoriság egy fix szám körül ingadozik: ezt nevezzük az A valószínűségének.Kocka-kísérlet

A valószínűség

Jele: $P(A)$

A relatív gyakoriság tulajdonságaiból:

Nemnegatív: $P(A) \geq 0$ minden A-ra

Egymást kizáró eseményekre, azaz, ha

$A \cap B = \emptyset$: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(additivitás)

$P(\Omega)=1$

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$: *valószínűségi mező*

Tulajdonságok 1.

Additivitás n eseményre: ha A_1, A_2, ..., A_n páronként kizáró események, akkor

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

Bizonyítás: indukcióval.

$P(\emptyset)=0$.

Bizonyítás: $\Omega = \Omega \cup \emptyset$ felbontásból és az additivitásból

Tulajdonságok 2.

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$$

Bizonyítás: $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$ felbontásból és az additivitásból

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Bizonyítás: $A \cup B = B \cup (A \setminus B)$ felbontásból, az additivitásból és az előző tulajdonságból.

Eseménytér

Nem mindig lehet minden $A \subseteq \Omega$ esemény (pl. nagy – megszámlálhatónál nagyobb – Ω esetén), ezért az $\mathcal{A}$ esemény-rendszer struktúrája: *σ-algebra*.

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. $A \in \mathcal{A} \longrightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$ (azaz $\mathcal{A}$ zárt a komplementer-képzés műveletére)
3. $\mathcal{A}$ zárt a megszámlálható unió műveletére

Példák σ-algebrára

$\mathcal{A}$ ={∅,Ω}

$\mathcal{A}$ ={∅,A, $\overline{A}$, Ω}

Ω minden részhalmazából álló halmazrendszer (hatványhalmaz, $\mathcal{P}$(Ω))

Kolmogorov-féle valószínűségi mező

(Ω, $\mathcal{A}$,P): *Kolmogorov-féle valószínűségi mező*, ha

Ω nemüres halmaz

$\mathcal{A}$ az Ω részhalmazainak σ-algebrája

P : $\mathcal{A} \to [0,1]$ halmazfüggvény (valószínűség) , melyre

4. P (Ω)=1
5. σ-additivitás: ha A_1, A_2 , ..., páronként kizáró események, akkor
$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$$

Véges valószínűségi mező

Ω={ω_1, ω_2,…,ω_n}, $\mathcal{A}$= $\mathcal{P}$(Ω).

Jelölés: p_i=P (ω_i).

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} P(\omega_i) = P(\Omega) = 1$$

az additivitásból.

$$P(A) = P(\cup_{i:\omega_i \in A} \omega_i) = \sum_{i:\omega_i \in A} p_i$$

Azaz a p_i nemnegatív, 1 összegű számok meghatározzák a valószínűséget.

Klasszikus valószínűségi mező 1

p_i=1/n minden i-re (azonos valószínűségűek az elemi események).

Ekkor $P(A) = \frac{k}{n}$ ahol k az A elemszáma,

n pedig az összes esetszám.

Másképpen: $P(A)$=kedvező esetek száma/ összes esetszám.

Klasszikus valószínűségi mező 2

A klasszikus valószínűségi mező alkalmazása előtt mindig meg kell győződni a feltételekről!

Példa: születésnap

Sokáig a valószínűséget általában is így próbálták definiálni, de ez nem fed le minden esetet.

Visszatevéses mintavétel

N termék, melyből M selejtes

n elemű minta visszatevéssel

A: pontosan k selejtes van a mintában

(k=0,…,n)
$$P(A) = \binom{n}{k} \left(\frac{M}{N}\right)^k \left(1 - \frac{M}{N}\right)^{n-k}$$

azaz a valószínűség kifejezhető a $p=M/N$ selejtarány segítségével:

$$P(A) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Mintavétel

Valószínűségszámítás

2. előadás

Ismétlés: Visszatevéses mintavétel

N termék, melyből M selejtes

n elemű minta visszatevéssel

A: pontosan k selejtes van a mintában

(k=0,…,n)
$$P(A)=\binom{n}{k}\left(\frac{M}{N}\right)^k\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-k}$$

azaz a valószínűség kifejezhető a $p=M/N$ selejtarány segítségével:
$$P(A)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

Mintavétel

Visszatevés nélküli mintavétel

N termék, melyből M selejtes

n elemű minta visszatevés nélkül

A: pontosan k selejtes van a mintában

(k=0,…,n)
$$P(A)=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Mintavétel

A valószínűség további tulajdonságai

A valószínűség végesen is additív:

ha A_1, A_2 , ..., A_n páronként kizáró események, akkor
$$P(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$$

Bizonyítás. $A_{n+1}= A_{n+2} =\ldots= \emptyset$ választással alkalmazzuk a σ-additivitást.

Tehát a korábban belátott tulajdonságok most is érvényesek.

Megszámlálható valószínűségi mező

$\Omega=\{\omega_1, \omega_2,\ldots,\omega_n,\ldots\}$, $\mathcal{A}=\mathcal{P}(\Omega)$.

Jelölés: $p_i=P(\omega_i)$, *valószínűségeloszlás*:

$p_i\geq 0$, az összegük 1.

A σ-additivitás miatt tetszőleges A eseményre megy a véges esetre látott számítás:
$$P(A)=P(\cup_{i:\omega_i\in A}\omega_i)=\sum_{i:\omega_i\in A}p_i$$

Példa: Hányadikra dobjuk az első fejet egy szabályos érmével? $p_i=1/2^i$ (i=1,2,…)

Geometriai valószínűségi mező

Ω=V (az n-dimenziós Euklideszi tér véges térfogatú tartománya)

$\mathcal{A}$ a tengelyekkel párhuzamos oldalú téglákat:
$$T=\times_{i=1}^{n}[a_i,b_i)$$

tartalmazó legszűkebb σ-algebra (elnevezés: Borel-halmazok, tartalmazza pl. az összes nyílt halmazt).

$A\in\mathcal{A}$, $A\subseteq V$ esetén $P(A):=\lambda(A)/\lambda(V)$, ahol λ az n-dimenziós térfogat.

Példa: Buffon tű-kísérlete

Egymástól egységnyi távolságra levő, párhuzamos vonalak közé ejtünk le ugyancsak egységnyi hosszúságú tűt. Mi a valószínűsége, hogy a tű metsz egy egyenest?

Tű-kísérlet

Modell: A tű középpontja és az egyenesekkel bezárt szöge egy pont a V=[0,1]X[0,π] tartománynak. Feltesszük, hogy a valószínűség a geometriai módon számolható, azaz egy adott tartományba a tartomány területével arányos valószínűséggel esik.

Érme-kísérlet

A valószínűség folytonossága

Állítás. *Ha $A_i \in \mathcal{A}$ (i=1,2,…) és $A_1 \supseteq A_2 \supseteq$…*

akkor az $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ *jelöléssel* $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$

Bizonyítás. $A_1 = A \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \ldots$

diszjunkt felbontás, tehát a

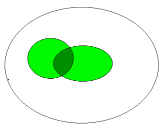
$$P(A_1 \setminus A_2) + P(A_2 \setminus A_3) + \ldots$$

sor konvergens. A fenti felbontást A_n-re alkalmazva:

$$P(A_n) = P(A) + P(A_n \setminus A_{n+1}) + P(A_{n+1} \setminus A_{n+2}) + \ldots$$

Események uniójának valószínűsége

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



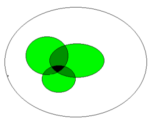
Példa: Magyar kártyacsomagból kétszer húzunk visszatevéssel. Mi a valószínűsége, hogy húzunk pirosat?

A: első piros, *B*: második piros

$P(A)=P(B)=1/4$, $P(A \cap B)=1/16$

Tehát $P(A\cup B)=7/16$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) -$$
$$- P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$



Szita (Poincaré) formula

Képlet az általános esetre:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} S_i^{(n)}$$

ahol

$$S_i^{(n)} = \sum_{1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_i \le n} P(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \ldots \cap A_{j_i})$$

az *i* tényezős metszetek valószínűségeinek összege.

Bizonyítás.

Alkalmazások

Ha az egyes események és metszeteik is egyformán valószínűek, akkor

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \binom{n}{i} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_i)$$

Átfogalmazás metszetekre:

$$P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_n) =$$
$$= 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i S_i^{(n)}$$

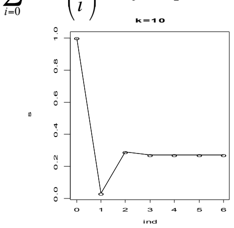
(Megállapodás: S_0=1.)

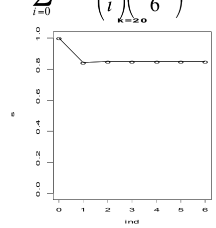
Példa: Mi a valószínűsége, hogy adott (*k*) számú kockadobásból minden számot legalább egyszer megkaptunk?

Megoldás

A_i: az *i* számot nem dobtuk

$$P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_6) =$$
$$= \sum_{i=0}^{6} (-1)^i \binom{6}{i} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_i) = \sum_{i=0}^{6} (-1)^i \binom{6}{i} \left(\frac{6-i}{6}\right)^k$$





Bonferroni egyenlőtlenség

A megközelítés mindig ilyen (a váltakozó előjelű tagok összege közrefogja a pontos értéket), azaz tetszőleges l-re:

$$\sum_{i=0}^{2l-1}(-1)^i S_i^{(n)} \le P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_n) \le \sum_{i=0}^{2l}(-1)^i S_i^{(n)}$$

Jordán Károly formulája

Annak a B_k eseménynek a valószínűségét keressük, hogy pontosan k db esemény következik be.

$$p_{n,k} = P(B_k) = \sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i \binom{k+i}{i} S_{k+i}$$

Spec.: k=0-ra éppen a komplementerek metszetére vonatkozó képletet kapjuk vissza.

Érdekes kérdés: hányadik kísérletnél lesz meg az adott számú esemény. A valószínűség kiszámítása: $p_{n,k} - p_{n-1,k}$.

Szimuláció (szelvénygyűjtés)

Feltételes valószínűség 1.

Az A esemény valószínűségét keressük.

Tudjuk, hogy B esemény bekövetkezett.

A relatív gyakoriságokkal: csak azokat a kísérleteket nézzük, amelyekben B bekövetkezett. Ezen részsorozatban az A relatív gyakorisága:

$$r_{A\cap B} / r_B$$

Feltételes valószínűség 2.

Megfelelője a valószínűségekre:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

az A esemény B-re vonatkozó feltételes valószínűsége (feltétel: $P(B)>0$).

Példa: kockadobás. A={páros számot dobunk}
B={3-nál nagyobbat dobtunk}
$P(A|B)=2/3$.

Példák

Monty Hall játék: melyik ajtót válasszuk? (Kettő mögött kecske, a harmadik mögött autó van.)

Ugyanez szimulációval:
Monty Hall szimuláció

Feltételes valószínűségi mező

Állítás. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező, $B \in \mathcal{A}$, $P(B)>0$.

$\mathcal{A}_B := \{A \cap B : A \in \mathcal{A}\}$, $P_B(A) := P(A|B)$. Ekkor $(B, \mathcal{A}_B, P_B)$ is valószínűségi mező.

Bizonyítás. $\mathcal{A}_B$ σ-algebra, hiszen $\mathcal{A}$ az volt. P_B nemnegatív, $P_B(B)=1$, P_B σ-additív, mert P σ-additív.

Teljes eseményrendszer

Definíció. Események A_1, A_2 , ..., sorozata *teljes eseményrendszer*, ha egymást páronként kizárják és egyesítésük Ω.

Tulajdonság: $P(A_1)+P(A_2)+\ldots=1$

Legtöbbször véges sok elemből álló teljes eseményrendszereket vizsgálunk.

Teljes valószínűség tétele.

Legyen B_1, B_2 , ..., pozitív valószínűségű eseményekből álló teljes eseményrendszer, $A \in \mathcal{A}$ tetszőleges. Ekkor

$$P(A)=P(A\mid B_1)P(B_1)+P(A\mid B_2)P(B_2)+\ldots$$

Bizonyítás. $A=(A\cap B_1)\cup(A\cap B_2)\cup\ldots$

diszjunkt tagokra bontás, tehát

$$P(A)=P(A\cap B_1)+P(A\cap B_2)+\ldots$$

és $P(A\cap B_i)=P(A\mid B_i)P(B_i)$ adja a tételt.

Példák

Feltételes valószínűségek két kockára

Kétfázisú kísérletek: érme-kocka

Összetett modellek (nemtől függő valószínűségek): a színvakság valószínűsége a férfiaknál 0.01, a nőknél 0.001 (Tfh. ugyanannyi a férfi, mint a nő.) Mi a valószínűsége, hogy egy találomra választott ember színvak?

A teljes eseményrendszer: {férfi} {nő}.

p=0.01/2+0.001/2=0.0055

Bayes tétele

Legyen B_1, B_2 , ..., pozitív valószínűségű eseményekből álló teljes eseményrendszer,

$A \in \mathcal{A}$ pozitív valószínűségű. Ekkor

$$P(B_k\mid A)=\frac{P(A\mid B_k)P(B_k)}{\sum_i P(A\mid B_i)P(B_i)}$$

(Visszakövetkeztetés az első lépés eredményére.)

Bizonyítás. A nevező éppen $P(A)$ a teljes valószínűség tétele miatt.

A számláló pedig $P(A\cap B)$, definíció szerint.

Példák

Ha egy találomra választott ember színvak, mi a valószínűsége, hogy férfi?

p=0.005/(0.005+0.0005)=10/11.

Számolás Java applet segítségével (példa: megbízhatatlan orvosi gyorsteszt pozitív eredménye esetén mekkora a betegség tényleges valószínűsége)

Események függetlensége

Ha a B esemény bekövetkezése nem befolyásolja az A valószínűségét, azaz $P(A|B)=P(A)$, akkor azt mondjuk, hogy az A és B függetlenek. Ez így nem ideális definíció (nem szimmetrikus,

$P(B)>0$ kell hozzá), ezért

Definíció. Az A és B *események függetlenek*, ha $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

3. előadás

Függetlenség

Definíció. Az A és B *események függetlenek*, ha $P(A \cap B)=P(A)P(B)$.

Tulajdonságok:

- Ha A és B diszjunktak, akkor csak triviális ($P(A)=0$ vagy $P(B)=0$) esetben függetlenek.
- Ha A és B függetlenek, akkor komplementereik is függetlenek.
- Önmaguktól csak a triviális események függetlenek.
- $A \subset B$ esetén csak akkor függetlenek, ha legalább az egyik triviális.

Példák

Húzunk egy lapot egy magyarkártya-csomagból. A: piros B: ász.

$P(A)=1/4$, $P(B)=1/8$, $P(A \cap B)=1/32$,

tehát függetlenek.

A függetlenség nagyon ritka azonos kísérletből meghatározott eseményeknél!

Tipikus eset függetlenségre: A az első, B a második kísérlet eredménye.

Független kísérletek

$A \in (\Omega_1, \mathcal{A}_1, P_1)$ az egyik kísérlethez kapcsolódik,

$B \in (\Omega_2, \mathcal{A}_2, P_2)$ pedig a másik kísérlethez kapcsolódik.

Függetlenségük értelmezéséhez kell a valószínűségi mezők szorzata:

$(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2, P_1 \times P_2)$ ami szintén valószínűségi mező.

$\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ elemei az $A \times B$ alakú események ($A \in \mathcal{A}_1$ megfelelője az $A \times \Omega_2$, így már értelmezhető $A \cap B = A \times B$).

$P_1 \times P_2 (A \times B) = P_1(A) P_2(B)$, ami éppen a függetlenséget jelenti.

Véges esetben $|\Omega_1|=n$, $|\Omega_2|=m$ mellett $|\Omega_1 \times \Omega_2|=nm$, amit már sokszor használtunk is

Általánosítás

Két eseményrendszer független, ha az első tetszőleges eleme független a második tetszőleges elemétől.

n esemény független, ha

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\ldots P(A_{i_k})$$

teljesül tetszőleges $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$ indexsorozatra és minden $2 \le k \le n$ számra.

Megjegyzések

Nem elég a fenti szorzat-tulajdonságot k=2-re megkövetelni. Ha csak ez teljesül: páronkénti függetlenségről beszélünk.

A szorzat-előállítás segítségével n független kísérlethez tartozó valószínűségi mező is értelmezhető. Ha A_i az i-edik kísérlethez tartozik, akkor $A_1, A_2, \ldots, A_n$ független. (A gyakorlatban ez a tipikus, fontos előfordulása ennek a függetlenségnek.)

További általánosítás

Végtelen sok eseményt függetlennek nevezünk, ha tetszőlegesen kiválasztva közülük véges sokat, független eseményeket kapunk.

A szorzat-előállítás segítségével végtelen sok független kísérlethez tartozó valószínűségi mező is értelmezhető. Ha A_i az i-edik kísérlethez tartozik, akkor $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ független.

Valószínűségi változók 1.

A legtöbbször nem maga a kísérlet kimenetele (a realizálódott elemi esemény) hanem egy számszerűsíthető eredmény az érdekes.

Példa: ipari termelés – minőségellenőrzés: a kérdés az esetleges selejtesek száma, nem pedig az, hogy pontosan melyik elemeket is választottuk.

Sok gyakorlati esetben nem is adódik természetesen az Ω halmaz (pl. időjárás megfigyelés).

Valószínűségi változók 2.

Mintavételi példa (folyt). N termék, n elemű minta. Ω elemszáma: $\binom{N}{n}$

Selejtesek száma (X): 0 és n közötti szám.

Matematikailag: $X : \Omega \to \boldsymbol{R}$ függvény

Feltétel: legyen értelme pl. annak a valószínűségéről beszélni, hogy $X<a$. Azaz $\{\omega: X(\omega)<a\} \in \mathcal{A}$ kell, hogy teljesüljön minden a–ra. Hasonlóképpen más „természetes" feltételnek is legyen valószínűsége.

Borel halmazok

A feltétel precíz felírásához:

Definíció. A valós számegyenes Borel halmazai : az a legszűkebb σ-algebra, amely tartalmazza a félegyeneseket (intervallumokat, nyílt halmazokat...). Gyakorlatilag: minden olyan halmaz, amit legfeljebb megszámlálhatóan sok halmazművelettel az intervallumokból elő tudunk állítani.

Jelölés : $\mathcal{B}(\boldsymbol{R})$.

Valószínűségi változók 3.

Precíz definíció: $X : \Omega \to \boldsymbol{R}$ függvény valószínűségi változó, ha

$\{\omega: X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$ minden B Borel halmazra.

Ha $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, akkor minden $\Omega \to \boldsymbol{R}$ függvény valószínűségi változó.

Gyakorlatban: minden olyan függvény valószínűségi változó, amelynek az értékeit meg tudjuk figyelni.

Példák

Kockadobás:

- X a dobott szám. $\Omega=\{1,2,\ldots,6\}$, $X(i)=i$. Értékkészlete: $\{1,2,\ldots,6\}$.
- X az első olyan dobás sorszáma, amikor 6 jön ki.
- $\Omega=\{1,2,\ldots,6\}\times\{1,2,\ldots,6\}\times\{1,2,\ldots,6\}\ldots$
- X értékkészlete: $\{1,2,\ldots\}$

Ipari termelés:

- X az első selejt gyártásának időpontja. X értékkészlete: $\boldsymbol{R}_+$.
- X egy adott termék hossza. X értékkészlete: $\boldsymbol{R}_+$ részhalmaza (nem szükséges előzetesen korlátozni).

Valószínűségi változók eloszlása

Mivel a gyakorlati problémáknál Ω nem mindig adható meg egyértelműen, és absztrakt halmazok helyett szívesebben dolgozunk a valós számokkal, a kulcsfogalom a *valószínűségi változók eloszlása*.

Legyen *B* tetszőleges Borel halmaz.

$Q_X(B):=P\{\omega: X(\omega)\in B\}$ valószínűséget ad meg ***R*** Borel halmazain. Ez az *X eloszlása*.

Diszkrét valószínűségi változók

Definíció: az *X diszkrét valószínűségi változó*, ha értékkészlete ($x_1,\ldots, x_n \ldots$) legfeljebb megszámlálható.

A valószínűségi változó definíciójából adódóan $\{\omega{:}X(\omega)= x_i\}=\{X=x_i\}\in\mathcal{A}$ azaz $p_i:=P(X=x_i)$ értelmes. Ezek meg is határozzák *X* eloszlását.

Véges vagy megszámlálható valószínűségi mezőn minden valószínűségi változó diszkrét.

Nem célszerű a természetszerűen folytonos értékkészletű *X* diszkretizálása (egyszerűbbek a folytonos modellek).

Példák

$X(\omega)=c$ minden ω-ra.
$$Q_X(B)=\begin{cases}0 \text{ ha } c\notin B\\ 1 \text{ ha } c\in B\end{cases}$$
Elnevezés: elfajult eloszlás.

$P(X=c)=1$.

X akkor 1, ha egy adott, *p* valószínűségű *A* esemény bekövetkezik és 0 különben (elnevezés: az *A esemény indikátora*).

$P(X=0)=1-p$

$P(X=1)=p$

$$Q_X(B)=\begin{cases}0, \text{ ha } 0\notin B \text{ és } 1\notin B\\ p, \text{ ha } 0\notin B \text{ és } 1\in B\\ 1\text{-}p, \text{ ha } 0\in B \text{ és } 1\notin B\\ 1, \text{ ha } 0\in B \text{ és } 1\in B\end{cases}$$

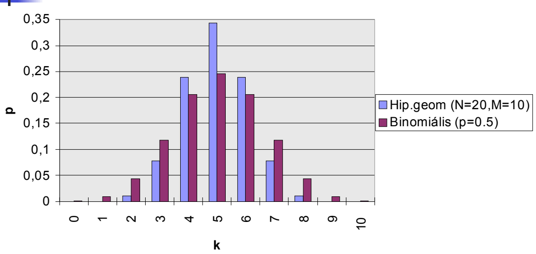
Példák 2.

Mintavételnél legyen *X* a mintában levő selejtesek száma.

Visszatevéses esetben (binomiális eloszlás):
$$P(X=k)=\binom{n}{k}\left(\frac{M}{N}\right)^k\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-k}\quad (k=0,\ldots,n)$$
Visszatevés nélküli esetben:

(hipergeometriai eloszlás)
$$P(X=k)=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}\quad (k=0,\ldots,n)$$

A binomiális és a hipergeom. elo. összehasonlítása



Tulajdonságok

Ha *X* diszkrét valószínűségi változó,

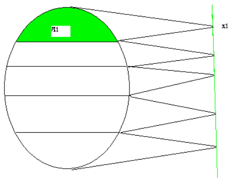
f :***R***→***R*** tetszőleges függvény, akkor *f* (*X*) is diszkrét valószínűségi változó.

Példa: *X* a gyártott termék hossza mm-ben. Tegyük fel, hogy *P* (*X*=18)=…= =*P* (*X*=22)=1/5. T.f.h. az ideális a 20 mm. Ekkor a *d*=|*X*-20| eloszlása: *P* (*d*=0)=1/5,

P (*d*=1) = *P* (*d*=2) = 2/5.

Teljes eseményrendszer

Ha X diszkrét valószínűségi változó, akkor az A_i={ω:X(ω)= x_i} események teljes eseményrendszert alkotnak.



Példák

Kocka-érme kísérlet

Szükség esetén Bayes tétel segítségével számolhatók a $P(X=k|Y=l)$ alakú valószínűségek.

X feltételes eloszlása *A* eseményre vonatkozóan: $q_i := P(X=x_i|A)$. Ez is eloszlás:

$$\sum_i q_i = \sum_i P(X = x_i \mid A) = \sum_i \frac{P(X = x_i \cap A)}{P(A)} = 1$$

Valószínűségi változók függetlensége

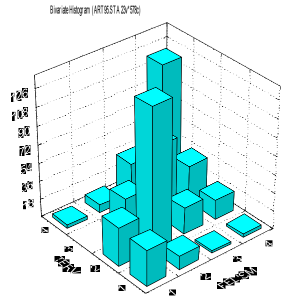
X és *Y* diszkrét valószínűségi változók függetlenek, ha

$P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_k\}) = P(X = x_i)P(Y = y_k)$ teljesül minden i,k értékre. (Azaz az X-hez és az Y-hoz tartozó teljes eseményrendszerek függetlenek.)

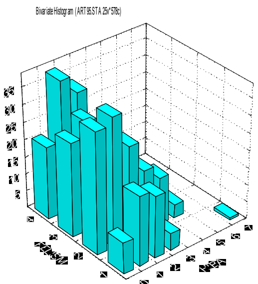
Megjegyzés:

- az elfajult eloszlású valószínűségi változó minden valószínűségi változótól független.
- Önmagától csak az elfajult eloszlású valószínűségi változó független.

Összefüggő valószínűségi változók



(Közelítőleg) független megfigyelések



Binomiális eloszlás alkalmazása

Visszatevéses mintavétel más realizációja: független kísérletek azonos körülmények között. $P(A)=p$ esemény, végezzünk n (rögzített számú) független kísérletet.

X: az *A* bekövetkezésének gyakorisága (pontosan hányszor jött ki az *A*). *X* eloszlása binomiális (n,p).

$X = X_1 + X_2 \ldots + X_n$ ahol X_i az i-edik kísérletnél az A esemény indikátora. Ezek az indikátorok függetlenek is!

Geometriai (Pascal) eloszlás

Független kísérletek azonos körülmények között. $P(A)=p$ esemény, addig végzünk kísérletet, míg A be nem következik.

X: az első sikeres kísérlet sorszáma.

$p_k=P(X=k)=p(1-p)^{k-1}$ (k=1,2,…)

Valóban valószínűségeloszlás ($p_1+p_2+\ldots=1$)

geometriai eloszlás

4. előadás

Poisson eloszlás

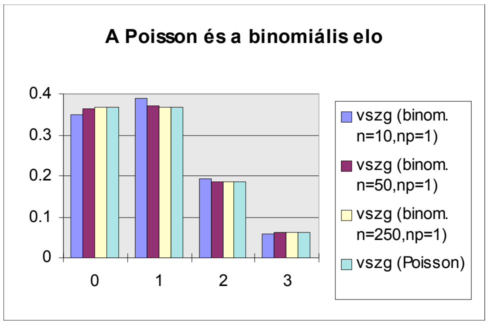
$P(X=k)=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ (k=0,1,2,…; λ>0 paraméter). Valóban eloszlás. Grafikusan

Állítás. Ha a binomiális eloszlás paramétereire $n \to \infty$ úgy, hogy $np \to \lambda$,

akkor a határérték éppen a λ paraméterű Poisson eloszlás.

Bizonyítás. $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \approx \binom{n}{k}\dfrac{\lambda^k}{n^k}\left(1-\dfrac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \to \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

A konvergencia a gyakorlatban



Alkalmazások

Első példa: lórugás áldozatainak száma a porosz hadseregben.

Poisson folyamat: időben lejátszódó folyamatnál adott [a,b) intervallumba eső események száma ($X_{a,b}$) éppen $\lambda(b-a)$ paraméterű Poisson eloszlású, ha a folyamat

- homogén: $X_{a,a+t}$ eloszlása csak t-től függ;
- utóhatás nélküli: $X_{a,b}$ és $X_{b,c}$ függetlenek ha $a<b<c$;
- nemelfajuló: $0<P(X_{a,b}=0)<1$.

Bizonyítás-vázlat

Legyen $p_t:=P(X_{0,t}=0)$. A homogenitás és a függetlenség miatt $p_1=p_{1/n}^n$ illetve

$$p_t=p_1^t=e^{-\lambda t}$$

Annak a valószínűsége, hogy egy t hosszúságú intervallumon pontosan k esemény következik be, közelíthető a $\binom{n}{k}(1-e^{-\lambda t/n})^k e^{-\lambda t/n}$

kifejezéssel, ami a előzőek és

$$n(1-e^{-\lambda t/n}) \to \lambda t$$

miatt éppen a $\lambda(b-a)$ paraméterű Poisson eloszlásnál a $P(X=k)$ valószínűség.

Gyakorlati alkalmazások

Balesetek száma

Viharok száma

Rendszer meghibásodásainak száma

Tulajdonság: ha kétféle esemény következhet be a folyamat során, akkor külön-külön az egyes események száma is Poisson folyamatot alkot.

Diszkrét valószínűségi változók várható értéke

Szerencsejátékban a pontos nyeremény nem látható előre. De: az átlagos nyereményről szeretnénk tudni. (Kedvező-e a játék? Fair játék: az ár éppen a várható érték.)

Példa: Dobókocka: annyi a nyereményünk, amennyit dobunk. Ennek átlagos értéke 1/6(1+2+…+6) =21/6=3.5

De ha nem szabályos a kocka, például az egyes helyett is 6 van, akkor az átlagos nyeremény 1/6 (2+…+5)+6/3=13/3.

Definíció. A $p_i=P(X=x_i)$ eloszlással megadott valószínűségi változó *várható értéke* E(X):= p_1x_1+ p_2x_2 +…, ha a sor abszolút konvergens.

Példák

Az elfajult eloszlás várható értéke:

$E(X)=cP(X=c)=c$.

A p valószínűségű A esemény indikátorának várható értéke:

$E(X)=1P(X=1)=p$

Az (n,p) paraméterű binomiális eloszlás várható értéke:

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n} np\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k}=np$$

Amerikai rulett. Ha k számra teszünk, a nyereményünk 36/k. A várható nyeremény (36/k)·(k/38)-1= - 2/38.

Példák 2.

A hipergeometriai eloszlás várható értéke

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n} k\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}=\sum_{k=1}^{n} n\frac{M}{N}\frac{\binom{M-1}{k-1}\binom{N-1-(M-1)}{n-1-(k-1)}}{\binom{N-1}{n-1}}=n\frac{M}{N}$$

A Poisson eloszlás várható értéke

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} k\lambda^k\frac{e^{-\lambda}}{k!}=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k\frac{e^{-\lambda}}{(k-1)!}=\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{k-1}\frac{e^{-\lambda}}{(k-1)!}=\lambda$$

Tulajdonságok

Nem minden valószínűségi változónak van véges várható értéke:

$P(X=2^k)=(1/2)^k$ $k=1,2,\dots$

esetén $E(X)=1+1+1+\dots=\infty$.

Azaz annak a játéknak az „ára", ahol 2^k Ft-ot kapunk, ha szabályos érmével k-adikra dobunk először fejet: végtelen. Ez a Szt.Pétervári paradoxon; gyakorlatban persze nem reális így ez a játék, hiszen nincs az a bank, amely korlátlan pénzt tudna fizetni.

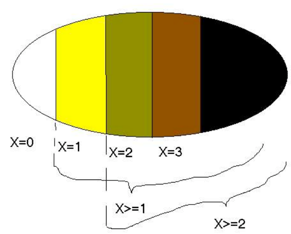
Ha E(X) véges, akkor az abszolút konvergencia miatt egyértelmű is.

Tulajdonságok 2.

Ha $X\geq 0$ és $E(X)$ véges, akkor $E(X)\geq 0$.

Ha $E(X)$ véges, akkor $E(aX+b)=aE(X)+b$ (a várható érték lineáris).

Ha X nemnegatív egész értékű, akkor $E(X)=P(X\geq 1)+P(X\geq 2)+\dots$



Alkalmazás: a Pascal eloszlás várható értéke

$P(X \geq k) = (1-p)^{k-1}$, így

$E(X) = 1 + (1-p) + (1-p)^2 + \ldots = 1/p$.

Természetes eredmény: átlagosan a hatodik dobásra kapjuk az első hatost.

Tulajdonság: a Pascal eloszlás örökifjú

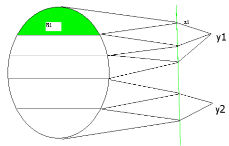
$$P(X > k + l \mid X > l) = P(X > k)$$

(k,l tetszőleges természetes számok).

Függvény várható értéke

Legyen g: $\boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$ függvény, X diszkrét valószínűségi változó, $p_i = P(X = x_i)$. Ekkor g(X) is valószínűségi változó, a várható értéke E(g(X)) az eredeti X változó eloszlásából is kiszámolható:

E(g (X)) $= p_1 g(x_1) + p_2 g(x_2) + \ldots$



Bizonyítás. A definíció szerint E(g (X))$= q_1 y_1 + q_2 y_2 + \ldots$ ahol $q_i = P$ (g (X)$= y_i$). $y_i =$g(x_j) valamely j-re, így az X változóhoz tartozó teljes eseményrendszer elemei szerint összegezhetünk és így éppen a bizonyítandó állítást kapjuk.

Példák

Ha g(X)=c, akkor E(g (X)) $= p_1 g(x_1) + p_2 g(x_2) + \ldots = c(p_1 + p_2 + \ldots) = c$.

A kockadobás négyzetének várható értéke: (1+4+9+...+36)/6=91/6.

Legyen X binomiális eloszlású. E(1/(X+1))=

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{1}{(n+1)p} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} p^{k+1} (1-p)^{n+1-(k+1)}$$

$$= \frac{1}{(n+1)p}(1-(1-p)^{n+1})$$

Valószínűségi vektorváltozók

Gyakran nem csak egy mennyiséget vizsgálunk a kísérletünk/megfigyelésünk során.

Példa: hőmérséklet, csapadék, szélerő stb.

$\underline{X} : \Omega \rightarrow \boldsymbol{R}^n$ függvény valószínűségi vektorváltozó, ha $\{\omega: X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$ minden B n-dimenziós Borel halmazra.

$\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ pontosan akkor valószínűségi vektorváltozó, ha a koordinátái valószínűségi változók.

Vektorváltozók eloszlása

Legyen B tetszőleges n-dimenziós Borel halmaz.

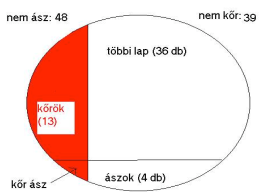
$Q_{\underline{X}}(B) := P\{\omega: \underline{X}(\omega) \in B\}$ valószínűséget ad meg $\boldsymbol{R}^n$ Borel halmazain. Ez az $\underline{X}$ *eloszlása*.

Speciális eset: ha diszkrét, akkor a $p_i := P(\underline{X} = \underline{x}_i)$ valószínűségek meg is határozzák X eloszlását.

A kétdimenziós esetben a diszkrét valószínűségi változó eloszlása legegyszerűbben táblázattal adható meg:

Példa: kétszer húzunk visszatevéssel egy francia kártyacsomagból

kőr\ ász	0	1	2
0	$(36/52)^2$	$2 \cdot 3 \cdot 36/(52)^2$	$(3/52)^2$
1	$2 \cdot 12 \cdot 36/(52)^2$	$2 \cdot (12 \cdot 3 + 1 \cdot 36)/(52)^2$	$2 \cdot 3/(52)^2$
2	$(12/52)^2$	$2 \cdot 12/(52)^2$	$(1/52)^2$

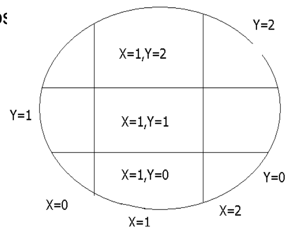


A peremeloszlások

(X,Y) eloszlásából (elnevezés: *együttes eloszlás*) következtethetünk az egyes változók eloszlására:

P(X=1)=P(X=1,Y=0)+P(X=1,Y=1)+P(X=1,Y=2)

Az egyes koordináták (alacsonyabb dimenziós vektorok) eloszlása: *peremeloszlás*.
Az együttes eloszlás tehát meghatározza a peremeloszlást.



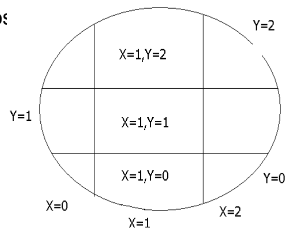
5. előadás

A peremeloszlások

(X,Y) eloszlásából (elnevezés: *együttes eloszlás*) következtethetünk az egyes változók eloszlására:

P(X=k)=P(X=k,Y=0)+P(X=k,Y=1)+P(X=k,Y=2)+...

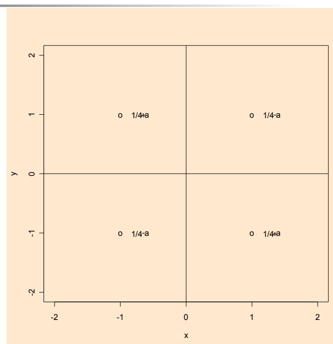
Az egyes koordináták (alacsonyabb dimenziós vektorok) eloszlása: *peremeloszlás*.
Az együttes eloszlás tehát meghatározza a peremeloszlást.



Kapcsolat az együttes- és a peremeloszlás között

A peremeloszlások viszont nem határozzák meg az együttest:
(tetsz. |a|<1/4-re
P(X=1)=P(X=-1)=1/2
P(Y=1)=P(Y=-1)=1/2)

Kivétel: ha a komponensek függetlenek



Példa

Polinomiális eloszlás: a kísérletünknek *r* különböző kimenetele lehet: $p_1,p_2,...,p_r$ valószínűségűek ($p_1+p_2+...+p_r=1$). *n* független, azonos körülmények között végrehajtott kísérlet során az *i*-edik esemény bekövetkezésének száma X_i.
Az együttes eloszlásuk:

$$P(X_1=k_1,...,X_r=k_r)=\frac{n!}{k_1!k_2!...k_r!}p_1^{k_1}p_2^{k_2}...p_r^{k_r} \quad (k_1+k_2+...+k_r=n)$$

Tulajdonságok

Speciális esetek:
- r=1 triviális
- r=2: binomiális eloszlás (X_1, $X_2=n-X_1$)
- Az egydimenziós peremeloszlások (X_i eloszlása) binomiális (n, p_i) paraméterrel

Példa: *n* kockadobásnál az egyes értékek gyakorisága (itt r = 6).
A koordináták nem függetlenek!
(Pl. X_1 = n esetén a többi koordináta 0.)

Összeg várható értéke

X, Y tetszőleges, véges várható értékűek. Ekkor E(X+Y)= E(X)+E(Y). Bizonyítás a diszkrét esetre:

$$E(X+Y)=\sum_{k,m}(x_k+y_m)P(X=x_k,Y=y_m)=\sum_{k,m}x_kP(X=x_k,Y=y_m)+$$

$$+\sum_{k,m}y_mP(X=x_k,Y=y_m)=\sum_k x_kP(X=x_k)+\sum_m y_mP(Y=y_m)=E(X)+E(Y).$$

Indukcióval: $E(X_1+X_2+\ldots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\ldots+E(X_n)$.

Alkalmazások

A binomiális eloszlás várható értéke:

$X= X_1 + X_2 \ldots + X_n$ ahol X_i az i-edik kísérletnél az A esemény indikátora.

Az előző tulajdonság alapján

$E(X)= E(X_1 + X_2 \ldots + X_n)=n\cdot E(X_1)= n\cdot p$.

Ugyanígy a hipergeometrikus eloszlás várható értéke is $n\cdot p$ ($p=M/N$ a selejtarány).

Névjegy probléma

n ember bedobja a névjegyét egy kalapba, ezután mindenki húz egyet véletlenszerűen. X: azon személyek száma, akik a saját névjegyüket húzzák.

X_i: az i-edik ember a saját névjegyét húzza. $E(X_i)=P(X_i=1)= 1/n$.

$X= X_1 + X_2 \ldots + X_n$ és így a várható érték additivitása alapján

$E(X)= E(X_1 + X_2 \ldots + X_n)=n\cdot E(X_1)= n\cdot 1/n=1$.

Szimuláció

A feltételes várható érték

Érme-kocka kísérlet: ha a kockával i a dobott szám, az érméknél kapott fejek száma binomiális (i,1/2) paraméterrel. Ekkor tehát a várható fej-szám $i/2$.

Formálisan/általánosan: ez a feltételes eloszlás várható értéke

$$\sum_i x_iP(X=x_i \mid A)=E(X \mid A)$$

Megjegyzés: Ha E(X) létezik, akkor E(X|A) is.

A teljes várható érték tétele

Tegyük fel, hogy E(X) létezik, és legyen B_1, B_2, ..., pozitív valószínűségű eseményekből álló teljes eseményrendszer. Ekkor

$$E(X)=E(X \mid B_1)P(B_1)+E(X \mid B_2)P(B_2)+\ldots$$

Bizonyítás.

$$\sum_i E(X \mid B_i)P(B_i)=\sum_i\sum_k x_kP(X=x_k \mid B_i)P(B_i)$$

Az abszolút konvergencia miatt az összegzés sorrendje felcserélhető:

$$=\sum_k x_k\sum_i P(X=x_k \mid B_i)P(B_i)=\sum_k x_kP(X=x_k)=E(X)$$

Példák

Érme-kocka kísérlet

Kocka-érme kísérlet

Valószínűségi változók szórásnégyzete

Nem mindegy, hogy mekkora a vizsgált véletlen mennyiség ingadozása.

Jobb, ha a buszok pontosan 10 percenként jönnek, mintha időnként 3 jön egymás után, és aztán 30 percet kell várni.

Az ingadozás számszerűsítése: a várható értéktől vett átlagos négyzetes eltérés, elnevezése: szórásnégyzet. Formálisan:

$$D^2(X):=E[(X-E(X))^2].$$

Kiszámítása: $D^2(X)= E[X^2-2XE(X)+E^2(X)]=$

$=E(X^2)-2E(X)E(X)+E^2(X)$

a várható érték linearitása miatt. Azaz

$$D^2(X)=E(X^2)-E^2(X).$$

Tulajdonságok

$D^2(X)\geq 0$, mert nemnegatív valószínűségi változó várható értéke.

$D^2(aX+b)=a^2D^2(X)$, mert $D^2(aX+b)= =E[(aX+b-E(aX+b))^2]= E[(aX+b-aE(X)-b)^2]= =E[(aX-aE(X))^2]=a^2 E[(X-E(X))^2]$.

Abból, hogy E(X) véges, még nem következik $D^2(X)$ végessége, hiszen ha $P(X=k)=c/k^3$ (egyértelműen megadható olyan *c*, amire ez eloszlás lesz) akkor E(X) véges, de $E(X^2)=c(1+1/2+...+1/k+...)$, ami végtelen.

Példák

Az elfajult eloszlás szórásnégyzete:

$D^2(X)= E(X^2)-E^2(X)=c^2-c^2=0.$

Megfordítás: ha $D^2(X)= 0$, akkor X 1 valószínűséggel konstans.

Biz.: $(X-E(X))^2 \geq 0$, várható értéke 0, tehát ő maga is 1 valószínűséggel 0, azaz X=E(X) 1 valószínűséggel.

A *p* valószínűségű *A* esemény indikátorának szórásnégyzete:

$D^2(X)= E(X^2)-E^2(X)= p - p^2= p(1-p)$. Azaz $p=0.5$ esetén a legnagyobb a szórásnégyzet.

A kockadobás szórásnégyzete:

$D^2(X)= E(X^2)-E^2(X)=(1+4+...+36)/6 - 49/4=91/6 - 49/4 = (182-147)/12=35/12.$

Az (*n*,*p*) paraméterű binomiális eloszlás szórásnégyzete

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}npk\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}np(k-1+1)\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k}=$$

$$=\sum_{k=2}^{n}n(n-1)p^2\binom{n-2}{k-2}p^{k-2}(1-p)^{n-k}+\sum_{k=1}^{n}np\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k}=$$

$$=n(n-1)p^2+np$$

$$D^2(X)=E(X^2)-E^2(X)=n(n-1)p^2+np-n^2p^2=np-np^2=np(1-p)$$

Példák 2.

A Poisson eloszlás szórásnégyzete:

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{\infty}k^2\lambda^k\frac{e^{-\lambda}}{k!}=\sum_{k=1}^{\infty}k\lambda^k\frac{e^{-\lambda}}{(k-1)!}=\lambda\sum_{k=1}^{\infty}(k-1+1)\lambda^{k-1}\frac{e^{-\lambda}}{(k-1)!}$$

$$=\lambda^2\sum_{k=2}^{\infty}\lambda^{k-2}\frac{e^{-\lambda}}{(k-2)!}+\lambda=\lambda^2+\lambda.$$

Ebből

$$D^2(X)=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda.$$

Azaz a Poisson eloszlás várható értéke és szórásnégyzete megegyezik.

Néhány szimuláció

A geometriai/Pascal eloszlás

Amerikai rulett

Összeg szórásnégyzete

$D^2(X+Y)=E[(X+Y-E(X+Y))^2]=$
$E[(X-E(X)+Y-E(Y))^2]=E[(X-E(X))^2]+E[(Y-E(Y))^2]+ +2E[(X-E(X))(Y-E(Y))]=D^2(X)+D^2(Y)+$
$+2E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$

Példák:

- X=Y esetén $D^2(X+Y)= D^2(2X)=4 D^2(X)$
- X=-Y esetén $D^2(X+Y)= D^2(0)=0$

azaz nem csak X és Y egydimenziós eloszlásától, hanem az együttes viselkedésüktől, azaz az együttes eloszlásuktól is függ az összegük szórásnégyzete.

A független val. változók esete

Állítás. ha X,Y függetlenek, akkor E(XY) =E(X)E(Y).

Bizonyítás.

$$E(XY)=\sum_{k,m} x_k y_m P(X=x_k, Y=y_m)$$

ami a függetlenség miatt így írható:

$$=\sum_k x_k P(X=x_k)\sum_m y_m P(Y=y_m)=E(X)E(Y).$$

Kovariancia

Definíció. Az X és Y kovarianciája:

cov(X,Y):=E[(X-E(X))(Y-E(Y))]

Az előzőek értelmében cov(X,Y)=0, ha X és Y függetlenek.

Kiszámítása: cov(X,Y)= E[XY-XE(Y)-YE(X)+E(X)E(Y)]=E(XY)-E(X)E(Y)

Megj.: Abból, hogy cov(X,Y)=0 nem következik, hogy függetlenek: legyen X szimmetrikus a 0=ra (pl. P(X=1)=P(X=-1)=P(X=0)=1/3) és $Y=X^2$. Ekkor cov(X,Y) $=E(X^3)-E(X)E(X^2)=0-0$, hiszen $E(X^3)=E(X)=0$.

A kovariancia szimmetrikus: cov(X,Y)= cov(Y,X)

cov(X,X)= $D^2(X)$

Összeg szórásnégyzete 2

Tehát $D^2(X+Y)=D^2(X)+D^2(Y)+ +2\text{cov}(X,Y)$

Speciálisan: $D^2(X+Y)=D^2(X)+D^2(Y)$, ha X és Y függetlenek (elég, hogy cov(X,Y)=0).

n tagú összegre:

$$D^2(X_1+...+X_n)=\sum_{i=1}^{n} D^2(X_i)+2\sum_{1\le i<j\le n}\text{cov}(X_i,X_j)$$

Spec.: $D^2(X_1+X_2+\ldots+X_n)= D^2(X_1)+D^2(X_2)+\ldots+D^2(X_n)$, ha a tagok páronként függetlenek.

A szórás

Szórásnégyzet mértékegysége az eredeti X mértékegységének a négyzete (azaz pl. a buszok követési időközénél négyzetperc). Ez nem teszi egyszerűvé interpretációját.

Szórás: D(X) a szórásnégyzet pozitív négyzetgyöke. Ez már a megfelelő mértékegységű, D(*a*X)=|*a*|D(X).

Korrelációs együttható

A kovariancia skálafüggő: cov(*a*X,*b*Y)=*ab*·cov(X,Y)

A változók közötti lineáris kapcsolat erősségét mérő mennyiség a *korrelációs együttható*:

$$R(X,Y)=\frac{\text{cov}(X,Y)}{D(X)D(Y)}$$

Tulajdonságai:

- R(X,Y)=0, ha X és Y függetlenek (ez sem fordítható meg)
- Ez alapján definíció szerint legyen R(X,Y)=0, ha X vagy Y elfajult eloszlású.
- R(X,aX+b)=1, ha a>0, mert cov(X,aX+b)=aD^2(X).

A korreláció tulajdonságai

$|R(X,Y)|\le 1$ és $|R|=1$ akkor és csak akkor, ha $X=aY+b$ 1 valószínűséggel ($a\neq 0$, $b\in \mathbf{R}$).

Ehhez: $X^* = \dfrac{X-E(X)}{D(X)}, Y^* = \dfrac{Y-E(Y)}{D(Y)}$

a standardizált változók. $E(X^*)=E(Y^*)=0$, $D(X^*)=D(Y^*)=1$.
$R(X,Y)=E(X^*Y^*)$.

$0\le E(X^*\pm Y^*)^2=E(X^*)^2 \pm 2E(X^*Y^*)+E(Y^*)^2=2\pm 2E(X^*Y^*)$, tehát $|R(X,Y)|\le 1$.

Ebből: $R=1$ akkor és csak akkor, ha $0=E(X^*-Y^*)^2$, azaz $X^*=Y^*$ 1 valószínűséggel. Ekkor $X=aY+b$, $a>0$.

$R=-1$ akkor és csak akkor, ha $0=E(X^*+Y^*)^2$, azaz $X^*=-Y^*$ 1 valószínűséggel. Ekkor $X=aY+b$, $a<0$.

Példák

Becslés

6. előadás

Korrelációs együttható

A változók közötti lineáris kapcsolat erősségét mérő mennyiség a *korrelációs együttható*:

$$R(X,Y) = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{D(X)D(Y)}$$

Tulajdonságai:

- $R(X,Y)=0$, ha X és Y függetlenek (ez sem fordítható meg)
- Ez alapján definíció szerint legyen $R(X,Y)=0$, ha X vagy Y elfajult eloszlású.
- $R(X,aX+b)=1$, ha $a>0$, mert $\mathrm{cov}(X,aX+b)=aD^2(X)$.

Példák

A polinomiális eloszlás koordinátái közötti korreláció: n=1-re. (Esetleg gyakorlaton lesz: ez ugyanaz minden n-re.)

$E(X_1)=p_1$, $E(X_2)=p_2$, $E(X_1X_2)=0$,

$D^2(X_1)= p_1(1-p_1)$, $D^2(X_2)= p_2(1-p_2)$. Ebből

$$R(X_1,X_2) = \frac{E(X_1X_2)-E(X_1)E(X_2)}{D(X_1)D(X_2)} = \frac{-p_1p_2}{\sqrt{p_1(1-p_1)p_2(1-p_2)}}$$

Spec.: $p:=p_1=p_2$, esetén $R=-p/(1-p)$.

Y közelítése X függvényével

Gyakori eset, hogy nem ismerjük a számunkra érdekes mennyiség (Y) pontos értékét (pl. holnapi részvény-árfolyam, vízállás, időjárás). Van viszont információnk hozzá kapcsolódó mennyiségről (X, mai értékek).

Feladat: olyan f_0 megtalálása, amelyre $f_0(X)$ a lehető legjobb közelítése Y-nak.

Matematikailag: f_0 a megoldása a $\min_f E(Y-f(X))^2$

szélsőérték-problémának (legkisebb négyzetes becslés).

Ha az együttes eloszlás ismert (nem teljesen reális, de a megfigyelések alapján közelíthető), akkor megoldható a feladat.

A várható érték optimumtulajdonsága

Állítás. A

$$\min_a E(Y-a)^2$$

feladat megoldása *a*=E(Y).

Bizonyítás. $E(Y-a)^2= E(Y^2)-2aE(Y)+a^2$

a szerint deriválva adódik, hogy valóban E(Y) a minimumhely.

A minimum értéke $D^2(Y)$.

Ugyanígy: X tetszőleges értéke esetén E(Y|X=x) adja a minimumot.

Példa

Annyi érmével dobtunk újra, amennyi fejet kaptunk 2 érmével dobva. Csak azt tudjuk, hogy hány fejet kaptunk a második dobásnál. Közelítsük ennek segítségével az első dobás eredményét.

Például F=0 esetre:

$$E(X\mid F=0)=\frac{\sum_{i=0}^{2} iP(X=i,F=0)}{P(F=0)}=\frac{\sum_{i=0}^{2} iP(F=0\mid X=i)P(X=i)}{\sum_{i=0}^{2} P(F=0\mid X=i)P(X=i)}$$

Az eredmények: E(X|F=2)=2, E(X|F=1)=4/3, E(X|F=0) =2/3.

Optimum a lineáris függvények körében

$$\min_{a,b} E[Y-(aX+b)]^2$$

- Egyszerűbben megoldható
- Nem kell az együttes eloszlás
- A megoldás deriválással:

$$E[Y-(aX+b)]^2=E(Y^2)+a^2E(X^2)+2abE(X)+$$
$$+b^2-2aE(XY)-2bE(Y)$$

$$\frac{\partial}{\partial a}E[Y-(aX+b)]^2=2aE(X^2)+2bE(X)-2E(XY)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial b}E[Y-(aX+b)]^2=2b+2aE(X)-2E(Y)=0$$

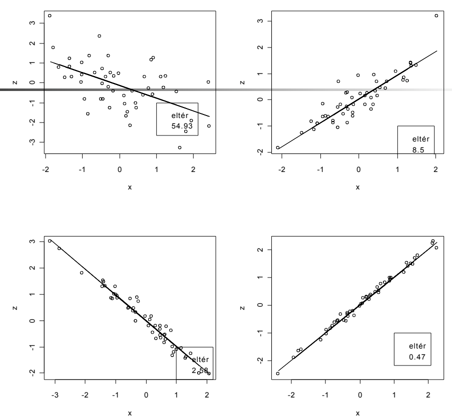
$$aE(X^2)=E(XY)-bE(X) \qquad b=E(Y)-aE(X)$$

$$aE(X^2)=E(XY)-(E(Y)-aE(X))E(X)$$

$$a=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{E(X^2)-E^2(X)} \qquad b=E(Y)-\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{E(X^2)-E^2(X)}E(X)$$

Az aX+b egyenes tulajdonságai

- Ez a legkisebb négyzetes eltérést adó a lineáris függvények között (a fenti megoldás valóban minimum)
- Elnevezés: regressziós egyenes
- Átmegy az (E(X),E(Y)) ponton
- Példa: Kockával dobunk, majd ha *k* az eredmény, az 1,…,*k* cédulák közül húzunk egyet. Nem tudjuk a húzás eredményét, csak a kockadobásét. Hogyan tippeljünk a húzott számra (a legkisebb négyzetes eltérést adó becslést keressük)? E(h|K=k)=(k+1)/2 az univerzálisan legjobb közelítés, tehát a legjobb lineáris közelítés is.



Konvolúció

Független valószínűségi változók összegének eloszlása

Most: nemnegatív, egész értékű esetre.

$$P(X+Y=k)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i,Y=k-i)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i)P(Y=k-i)$$

Példák: X, Y függetlenek, binomiális eloszlásúak (n,p), ill. (m,p) paraméterekkel. Ekkor

$$P(X+Y=k)=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}p^{i}(1-p)^{n-i}\binom{m}{k-i}p^{k-i}(1-p)^{m-k+i}=$$

$$=p^{k}(1-p)^{n+m-k}\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}=p^{k}(1-p)^{n+m-k}\binom{n+m}{k}$$

Példák

Azaz X+Y is binomiális (n+m,p) paraméterekkel.
Spec.: X= X_1+ X_2+… +X_n, ahol X_i p paraméterű indikátorváltozó, a tagok függetlenek is. Ebből is kijön, hogy E(X)=np, D^2(X)=np(1-p).

Példa 2: X, Y függetlenek, Poisson eloszlásúak λ, ill. μ paraméterekkel. Ekkor X+Y is Poisson, λ+μ paraméterrel.

$$P(X+Y=k)=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda^{i}e^{-\lambda}}{i!}\frac{\mu^{k-i}e^{-\mu}}{(k-i)!}=\frac{e^{-(\mu+\lambda)}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda^{i}}{i!}\frac{\mu^{k-i}k!}{(k-i)!}=\frac{e^{-(\mu+\lambda)}}{k!}(\mu+\lambda)^{k}$$

Negatív binomiális eloszlás

Legyen X= X_1+ X_2+… +X_r, ahol X_i p paraméterű Pascal eloszlású változó, függetlenek. Ekkor X eloszlása:

$$P(X=k)=\binom{k-1}{r-1}p^{r}(1-p)^{k-r}$$

ha k≥r (különben 0). Elnevezés: r-ed rendű, p paraméterű negatív binomiális eloszlás. Ez éppen annak a kísérletnek a sorszáma, ahol az r-edik sikeres jön ki. Ez bizonyítja is a képlet helyességét (formálisan is meg lehet kapni a konvolúciós képletből indukcióval).

Néhány szimuláció

A negatív binomiális eloszlás

Poisson eloszlás

Egyenletes eloszlás

Valószínűségi változók általános fogalma (ismétlés)

X : Ω→***R*** függvény valószínűségi változó, ha {ω: *X*(ω)∈*B*}∈𝒜 minden *B* Borel halmazra.

Q_X(B):=*P* {ω: *X*(ω)∈*B*} az *X eloszlása*.

Ennek megadásához elegendő a félegyenesek valószínűségeit megadni: F_X(z):=P(X<z) meghatározza Q_X(B) értékét tetszőleges B-re (nem bizonyítjuk).

Az eloszlásfüggvény

Az F_X(z): ***R*** →***R*** függvény az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye.

Tulajdonságai:

- 0≤F_X(z)≤1
- F_X(z) monoton növő
- $\lim_{z\to\infty} F_X(z)=1$, $\lim_{z\to-\infty} F_X(z)=0$
- F_X(z) balról folytonos.

Bizonyítás: Az első kettő triviális, az utolsó kettőhöz a valószínűség folytonossága kell: $\lim_{n\to\infty} P(A_n)=P(A)$

Ha $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ akkor

ahol $A=\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i$

Bizonyítás

Az A_n= (-∞,-n) választással alkalmazva a folytonosságot a Q_X valószínűségre adódik a 3. tulajdonság második fele.

A folytonosságot a komplementerekre alkalmazva kapjuk, hogy ha $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ és $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ akkor $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$ amit

A_n= (n, ∞) választással alkalmazva éppen a 3. tulajdonság első felét kapjuk.

Végül a 4. tulajdonsághoz A_n= (-∞,x-1/n) a jó választás, ekkor A= (-∞,x).

Példák

Tetszőleges 1-4 tulajdonságú F-hez létezik X, aminek F az eloszlásfüggvénye (pl. Ω=***R*** , P([a,b))=F(b)-F(a), X az idenditásfüggvény

A c pontban elfajult eloszlás eloszlásfüggvénye
$$F(z) = \begin{cases} 0, \text{ha } z \le c \\ 1, \text{ha } z > c \end{cases}$$

Az indikátorváltozó eloszlásfüggvénye
$$F(z) = \begin{cases} 0, \text{ha } z \le 0 \\ 1-p, \text{ha } 0 < z \le 1 \\ 1, \text{ha } z > 1 \end{cases}$$

Folytonos eloszlások

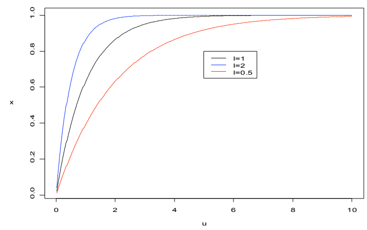
Definíció. X folytonos eloszlású, ha eloszlásfüggvénye folytonos.

Példa: egyenletes eloszlás [a,b] intervallumon:

$$F(z) = \begin{cases} 0, \text{ha } z \le a \\ \dfrac{z-a}{b-a}, \text{ha } a < z \le b \\ 1, \text{ha } z > b \end{cases}$$

Exponenciális eloszlás

$$F(z) = \begin{cases} 0, \text{ha } z \le 0 \\ 1-e^{-\lambda z}, \text{ha } 0 < z \end{cases}$$ ahol λ>0 paraméter



Valószínűségek kiszámítása

P(a≤X<b)=F(b)-F(a)

P(a<X<b)=F(b)-F(a+0)

P(a≤X≤b)=F(b+0)-F(a)

P(X=a)= F(a+0)-F(a), azaz ha F folytonos, minden egyes pont 0 valószínűségű.

Abszolút folytonos eloszlások

Ha létezik f, hogy F előáll f integrálfüggvényeként:

$$F(z) = \int_{-\infty}^{z} f(t)dt$$

akkor azt mondjuk, hogy F abszolút folytonos, f ***sűrűségfüggvénnyel***.

f tulajdonságai: f≥0,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$$

Ez elég is: minden ilyen f integrálfüggvénye eloszlásfüggvény.

Példák

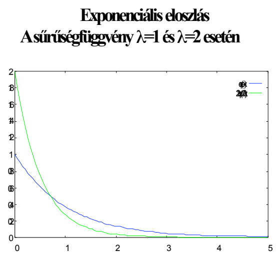
Egyenletes eloszlás [a,b] intervallumon

$$f(z) = \begin{cases} 0, \text{ha } z \le a \\ \dfrac{1}{b-a}, \text{ha } a < z \le b \\ 0, \text{ha } z > b \end{cases}$$

Exponenciális eloszlás

$$f(t) = \begin{cases} 0, \text{ha } t \le 0 \\ \lambda e^{-\lambda t}, \text{ha } 0 < t \end{cases}$$

Exponenciális eloszlás



A sűrűségfüggvény tulajdonságai

Létezéséhez szükséges, hogy F folytonos legyen.

Ha F abszolút folytonos, akor F'=f, ahol F deriválható.

f nem egyértelmű (pl. véges sok pontban tetszőleges értéket adhatunk neki), ezért a legegyszerűbb, szakaszonként folytonos változatot választjuk.

Szemléletes jelentése:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(t)dt \approx f(a)(b-a)$$

azaz rövid intervallumokra a valószínűség közelíthető a sűrűségfüggvény értékének és az intervallum hosszának a szorzatával.

Szemléletes bevezetés

Ha úgy közelítjük az abszolút folytonos eloszlást (pl. az év egy adott napján 12 órakor Bp-en a hőmérséklet), hogy egyre pontosabb eszközökkel mérjük meg, akkor P(z<X<z+δ)/ δ ≈f(z), azaz a valószínűségekből határátmenettel adódik a sűrűségfüggvény.

g(X) eloszlása

Legyen g: ***R*** →***R*** (mérhető) függvény. Ekkor g(X) is valószínűségi változó.

Abból, hogy X eloszlása abszolút folytonos, nem következik még g(X) eloszlásának folytonossága sem: pl. g(x)=c esetén g(X) elfajult eloszlású.

7. előadás

g(X) eloszlása

Legyen g: ***R*** → ***R*** (mérhető) függvény. Ekkor g(X) is valószínűségi változó.

Abból, hogy X eloszlása abszolút folytonos, nem következik még g(X) eloszlásának folytonossága sem: pl. g(x)=c esetén g(X) elfajult eloszlású.

$F_{g(X)}(b) = P(g(X)<b) = P(X \in g^{-1}(-\infty,b))$

Ha g szigorúan monoton nő, akkor ebből

$F_{g(X)}(b) = F_X(g^{-1}(b))$

Ha g szigorúan monoton csökken, akkor pedig

$F_{g(X)}(b) = 1-F_X(g^{-1}(b))$

g(X) sűrűségfüggvénye

$F_{aX+b}(z) = F_X((z-b)/a)$, ha a>0 és

$F_{aX+b}(z) = 1-F_X((z-b)/a)$, ha a<0.

Ebből adódik, hogy ha X abszolút folytonos, és g(z) =az+b, akkor g(X) sűrűségfüggvénye

$f_{aX+b}(z)=f_X((z-b)/a)/|a|$.

Általános eredmény: ha g szigorúan monoton, folytonosan deriválható, g'≠0, akkor

$$f_{g(X)}(z) = \frac{f_X(g^{-1}(z))}{|g'(g^{-1}(z))|}$$

Példák

Legyen X egyenletes eloszlású az [a,b] intervallumon. Ekkor (X-a)/(b-a) a [0,1] intervallumon lesz egyenletes eloszlású.

Ha X exponenciális eloszlású λ paraméterrel, akkor X/λ is exponenciális eloszlású, λ=1.

Normális eloszlás

A standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

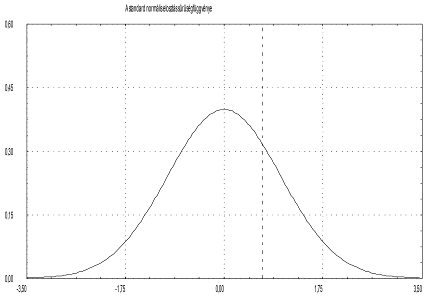
Valóban sűrűségfüggvény, mert f>0 és

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2})} dxdy =$$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} r e^{-\frac{r^2}{2}} d\varphi dr = \int_0^{\infty} r e^{-\frac{r^2}{2}} dr = \left[-e^{-\frac{r^2}{2}}\right]_0^{+\infty} = 1$$

a polárkoordinátás helyettesítésből

A standard normális sűrűségfüggvény



A normális eloszlás

Legyen m tetszőleges, σ pedig pozitív valós szám. Ha X standard normális eloszlású, akkor az Y= σX+m valószínűségi változó (m,σ) paraméterű normális eloszlású. Ennek sűrűségfüggvénye az

$f_{aX+b}(z)=f_X((z-b)/a)/|a|$ képletből

$$f_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Abszolút folytonos eloszlású valószínűségi változók várható értéke

A múlt órán látott határátmenet segítségével (egyre finomabb felosztással közelítjük a folytonos eloszlást) $E(X)=\Sigma zP(z<X<z+\delta)\approx \Sigma z\delta f(z)\approx\int zf(z)dz$

Ebből a definíció: az abszolút folytonos eloszlású X várható értéke: $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} yf_X(y)dy$

ha az integrál létezik.

Tulajdonságok, példák

Mivel a diszkrét esetből határátmenettel kaptuk a fogalmat, a tulajdonságok (pl. $E(aX+b)=aE(X)+b$, $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ stb.) most is érvényben maradnak.

Ha X egyenletes eloszlású az [a,b]-ben, akkor

$$E(X)=\int_a^b \frac{y}{b-a}dy=\left[\frac{y^2}{2(b-a)}\right]_a^b=\frac{a+b}{2}$$

További példák

Ha X exponenciális eloszlású λ paraméterrel, akkor

$$E(X)=\int_0^{\infty}\lambda ye^{-\lambda y}dy=\left[-ye^{-\lambda y}\right]_0^{\infty}+\int_0^{\infty}e^{-\lambda y}dy=\frac{1}{\lambda}$$

Ha X standard normális eloszlású, akkor

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-\infty}^{\infty}=0$$

Ebből az (m,σ) paraméterű normális eloszlás várható értéke: $E(X)=m$.

Ha a Z változó Q_Z eloszlása keverék-eloszlás (azaz pl. p valószínűséggel X-et, 1-p valószínűséggel Y-t figyeljük meg), akkor $E(Z)=pE(X)+(1-p)E(Y)$.

Függvény várható értéke

Legyen X sűrűségfüggvénye f és $Y=g(X)$ (g Borel mérhető). Ekkor

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}g(y)f_X(y)dy$$

Bizonyítás az általános esetre a diszkrét valószínűségi változókra vonatkozó állításból határátmenettel. Spec. ha g szigorúan monoton, folytonosan deriválható, $g'>0$, akkor

$$f_{g(X)}(z)=\frac{f_X(g^{-1}(z))}{g'(g^{-1}(z))}$$

és így

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}zf_Y(z)dz=\int_{-\infty}^{\infty}z\frac{f_X(g^{-1}(z))}{g'(g^{-1}(z))}dz=\int_{-\infty}^{\infty}g(y)g'(y)\frac{f_X(g^{-1}(g(y)))}{g'(g^{-1}(g(y)))}dy$$

A szórásnégyzet

Mivel ez a várható értékből származtatott mennyiség, most is érvényes a $D^2(X):=E[(X-E(X))^2]$ definíció, illetve a $D^2(X)=E(X^2)-E^2(X)$ számítási módszer.

A korábban látott tulajdonságok itt is érvényben maradnak.

Néhány nevezetes eloszlás

Példák

Ha X egyenletes eloszlású az [a,b] intervallumon, akkor

$$E(X^2)=\int_a^b\frac{y^2}{b-a}dy=\left[\frac{y^3}{3(b-a)}\right]_a^b=\frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$D^2(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{a^2+ab+b^2}{3}-\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{a^2-2ab+b^2}{12}=\frac{(a-b)^2}{12}$$

Ha X exponenciális eloszlású, akkor

$$E(X^2)=\int_0^{\infty}y^2\lambda e^{-\lambda y}dy=\left[-y^2e^{-\lambda y}\right]_0^{\infty}+\int_0^{\infty}2ye^{-\lambda y}dy=\frac{2}{\lambda^2}$$

$$D^2(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}$$

Példák/2

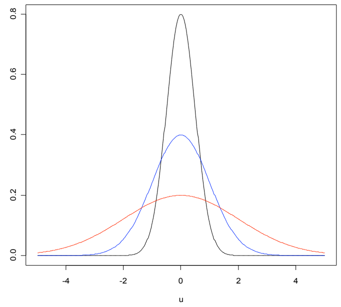
Legyen X standard normális eloszlású, akkor

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} x 2x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$$

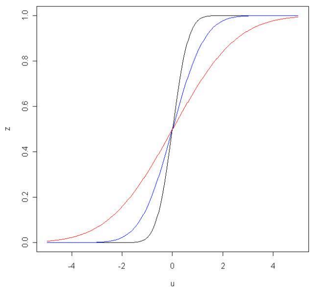
parciálisan integrálva. Így $D^2(X)=1$.

Ebből az (m,σ) paraméterű normális eloszlás szórásnégyzete: $D^2(\sigma X+m)=\sigma^2$.

0 várható értékű normális eloszlások sűrűségfüggvénye



0 várható értékű normális eloszlások eloszlásfüggvénye



Momentumok

X m-edik momentuma $E(X^m)=\int_{-\infty}^{\infty} y^m f_X(y)dy$

X m-edik centrális momentuma

$$E(X-EX)^m=\int_{-\infty}^{\infty}(y-EX)^m f_X(y)dy$$

Tulajdonság: ha az eloszlás szimmetrikus a 0-ra, akkor a páratlan rendű momentumok – ha léteznek – 0-val egyenlők.

Következmény: ha az eloszlás szimmetrikus, akkor a páratlan rendű centrális momentumok – ha léteznek – 0-val egyenlők.

Ha az m-edik momentum véges, akkor a k<m-edik is.

Valószínűségi vektorváltozók

Emlékeztető: $X=(X_1, X_2, ..., X_d): \Omega\rightarrow \boldsymbol{R}^d$ függvény valószínűségi vektorváltozó, ha

$\{\omega: X(\omega)\in B\}\in\mathcal{A}$ minden B d-dimenziós Borel halmazra. (Pontosan akkor teljesül, ha X_i valószínűségi változó minden $1\leq i\leq d$-re.)

$Q_X(B):=P\{\omega: X(\omega)\in B\}$ az *X eloszlása* $\boldsymbol{R}^d$ Borel-halmazain.

Ennek megadásához elegendő a $F_X(z):=P(X<z)$ valószínűségeket megadni ($z\in\boldsymbol{R}^d$), a < reláció koordinátánként értendő, azaz X<z pontosan akkor teljesül, ha $X_i<z_i$ minden $1\leq i\leq d$-re. Ezek meghatározzák $Q_X(B)$ értékét tetszőleges B-re (nem

Együttes eloszlásfüggvény

Az $F_X(z):=P(X<z)$ $\boldsymbol{R}^d\rightarrow\boldsymbol{R}$ függvény az X valószínűségi vektorváltozó együttes eloszlásfüggvénye.

Az egydimenziós esettel analóg tulajdonságai:

- $0\leq F_X(z)\leq 1$
- $F_X(z)$ minden koordinátájában monoton növő
- $\lim F_X(z)=1$, ha z minden koordinátájára $z_i\rightarrow\infty$
- $\lim F_X(z)=0$ ha z legalább egy koordinátájára $z_i\rightarrow-\infty$
- $F_X(z)$ minden koordinátájában balról folytonos.

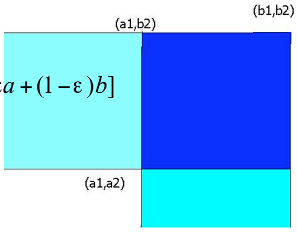
Téglatestek valószínűségei

P(a ≤ X < b) ≥ 0 minden a < b ∈ $\boldsymbol{R}^d$ –re. Ez kifejezhető az X eloszlásfüggvényével:

d=2-re: P(a ≤ X < b)=F(b_1,b_2)- F(b_1,a_2)- F(a_1,b_2)+ F (a_1,a_2).

Általánosan:

$$P(a \le X < b) = \sum_{i=0}^{d} \sum_{\substack{\varepsilon \in \{0,1\}^d \\ \sum \varepsilon_j = i}} (-1)^i F[\varepsilon a + (1-\varepsilon)b]$$



ahol

Bizonyítás

A szita formulával jön ki, nem részleteztük.

Az eloszlásfüggvény tulajdonságai

Legyen *k*= k_1<k_2<,...<k_i az {1,…,d} részhalmaza. Ekkor ha $z_i \to \infty$ pontosan az {1,…,d}\k –beli koordinátákra, akkor lim $F_X(z)$= $F_{X^*}(z^*)$ ahol z*∈ $\boldsymbol{R}^i$ pontosan a *z* *k*-beli koordinátáiból áll. X* is i-dimenziós valószínűségi változó, elnevezés: az X peremeloszlása.

Spec.: d=2, i=1: $\lim_{x\to\infty} F_{X,Y}(x,y)=F_Y(y)$ $\lim_{y\to\infty} F_{X,Y}(x,y) =F_X(x)$

Tetszőleges, a felsorolt összes tulajdonsággal rendelkező F-hez létezik X d-dimenziós vektorváltozó, aminek F az eloszlásfügvénye.

Sűrűségfüggvény

Ha létezik f: $\boldsymbol{R}^d \to \boldsymbol{R}$ függvény, hogy F előáll f integrálfüggvényeként:

$$F(z) = \int_{-\infty}^{z} f(t)dt$$

akkor azt mondjuk, hogy F abszolút folytonos, f sűrűségfüggvénnyel. Az integrál most d-dimenziós, értelmezése:

$$F(z) = \int_{-\infty}^{z_1}\int_{-\infty}^{z_2}\cdots\int_{-\infty}^{z_d} f(t_1,t_2,...,t_d)dt_d...dt_2dt_1$$

A peremeloszlások sűrűségfüggvénye

Legyen d=2. Ha (X,Y) abszolút folytonos, f(x,y) együttes sűrűségfüggvénnyel, akkor X sűrűségfüggvénye

$$g_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy$$

Bizonyítás.

$$\int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dydx = F_{X,Y}(z,\infty) = P(X < z)$$

Ugyanígy Y sűrűségfüggvénye

$$h_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx$$

A függetlenség esete

Ha X koordinátái függetlenek, akkor definíció szerint $F_X(z)=P(X_1<z_1, X_2< z_2,..., X_d<k_d)=F_1(z_1)F_2(z_2)...F_d(z_d)$ (minden z ∈$\boldsymbol{R}^d$ –re). Meg is fordítható: F szorzatelőállításából következik a függetlenség.

Deriválva: a függetlenség abszolút folytonos változókra ekvivalens a sűrűségfüggvény $f_X(z)=f_1(z_1) f_2(z_2)...f_d(z_d)$ alakú előállításával is.

Példa: az egységnégyzeten egyenletes eloszlás sűrűségfüggvénye (f(z)=1 ha 0<z<1) előáll $f_1(z_1)f_2(z_2)$ alakban, ahol $f_i(z_i)$=1, ha 0<z_i<1 (i=1,2), ez éppen a

8. előadás

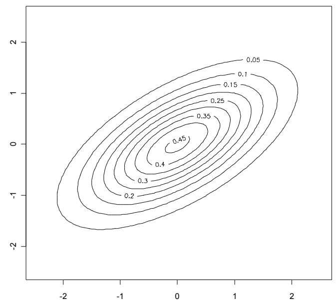
Példák

Kétdimenziós normális eloszlás sűrűségfüggvénye

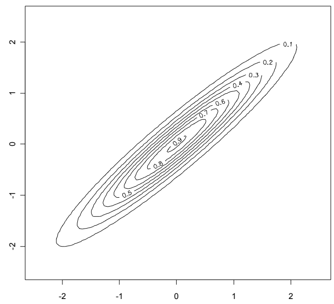
$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}+\frac{2\rho}{\sigma\ \sigma}(x-\mu)(y-\nu)-\frac{(y-\nu)^2}{2\varsigma^2})\right\}$$

ahol az első koordináta (μ,σ), a második pedig (ν,ζ) paraméterű normális eloszlású. $-1<\rho<1$ pedig a komponensek közötti korreláció. Ez az a kivételes eset, amikor $\rho=0$ elégséges is a függetlenséghez.

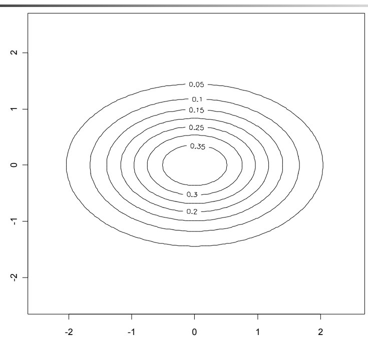
0.5 korrelációjú, standard normális eloszlású változók együttes sűrűségfüggvényének kontúrjai



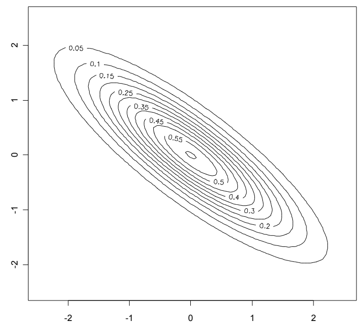
0.9 korrelációjú, standard normális eloszlású változók együttes sűrűségfüggvénye



Független standard normális eloszlású változók együttes sűrűségfüggvénye



-0.75 korrelációjú, standard normális eloszlású változók együttes sűrűségfüggvénye



Feltételes eloszlások

Legyen d=2. Ha (X,Y) abszolút folytonos, $f_{X,Y}(x,y)$ együttes sűrűségfüggvénnyel,akkor $f_{X|Y}(x|y):= f_{X,Y}(x,y)/f_Y(y)$ az X változó Y=y feltétel melletti sűrűségfüggvénye.

Átrendezve: $f_{X,Y}(x,y)=f_Y(y)\, f_{X|Y}(x|y)$.

Ezt y szerint integrálva az X sűrűségfüggvénye

$$g_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x \mid y) f(y)\,dy$$

(a teljes valószínűség tételének a sűrűségfüggvényekre vonatkozó esete).

Konvolúció

Független valószínűségi változók összegének eloszlása

Képlet az abszolút folytonos esetre:

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) f_Y(z-u)\,du$$

Bizonyításhoz a teljes valószínűség tétel megfelelője (az előző képletet integrálva az A halmazon):

$$P(A) = \int_{-\infty}^{\infty} P(A \mid X = u) f_X(u)\,du$$ ebből

$$P(X+Y<z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) P(X+Y<z \mid X=u)\,du = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) P(Y<z-u)\,du$$

ezután z szerint deriválva kapjuk az állítást.

Példák

Exponenciális eloszlások konvolúciója (független, azonos, λ paraméterű exponenciális eloszlások összegének sűrűségfüggvénye):

$$h_{X+Y}(z) = \int_0^z \lambda e^{-\lambda u} \lambda e^{-\lambda(z-u)}\,du = \lambda^2 \int_0^z e^{-\lambda z}\,du = \lambda^2 z e^{-\lambda z}$$

ha z>0 és 0 különben. n tagú összegre indukcióval bizonyítható, hogy az összeg sűrűségfüggvénye

$$h_n(z) = \frac{\lambda^n z^{n-1} e^{-\lambda z}}{(n-1)!}$$

ha z>0 és 0 különben (elnevezés: n-ed rendű, λ paraméterű gamma eloszlás).

Egyenletes eloszlások konvolúciója

Független, azonos, a [0,1] intervallumon egyenletes eloszlások összegének sűrűségfüggvénye):

$$f_{X+Y}(z) = \begin{cases} \int_0^z 1\,du = z \quad (0<z<1) \\ \int_{z-1}^1 1\,du = 2-z \quad (1 \le z < 2) \end{cases}$$

egyenletes eloszlás

Normális eloszlások konvolúciója

Legyen X (m_1,σ_1), Y pedig (m_2,σ_2) paraméterű normális eloszlású, t.f.h. függetlenek.

Ekkor X+Y is normális eloszlású,

paraméterekkel. $(m_1+m_2, \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2})$

Bizonyítás: $m_1=m_2=0$ feltehető, hiszen ha

$X-m_1+Y-m_2$ normális eloszlású, akkor X+Y is.

Bizonyítás befejezése

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(z-x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\left(\frac{x^2}{2\sigma_1^2}+\frac{(z-x)^2}{2\sigma_2^2}\right)}\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi \;{}_1\sigma_2} \exp\{-\frac{x^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}{2\sigma_1^2\sigma_2^2} - \frac{z^2}{2\sigma_2^2} + \frac{2zx}{\sigma\, 2\sigma_2^2}\}\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi \;{}_1\sigma_2} \exp\left\{-\frac{z^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)} - \frac{1}{2}\left(\frac{x\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{\boldsymbol{\sigma}_1\sigma_2} - \frac{z\sigma_1}{\sigma_2\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\right)^2\right\}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} e^{-\frac{z^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \frac{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{\sqrt{2\pi}\;\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{\sigma_1\sigma_2} - \frac{z\sigma_1}{\sigma_2\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\right)^2\right\}dx$$

Markov-típusú egyenlőtlenségek

Legyen $X \geq 0$ valószínűségi változó,

g: $\boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{R}_+$ monoton növő. Ekkor

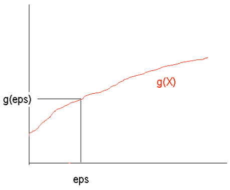
$$P(X \geq \varepsilon) \leq E(g(X))/g(\varepsilon).$$

Bizonyítás.

$E(g(X)) \geq g(\varepsilon)P(X \geq \varepsilon)$

mert $X \geq \varepsilon$ eseményen

$g(X)) \geq g(\varepsilon)$



Alkalmazások

g(x)=x: Ha $X \geq 0$ valószínűségi változó, akkor $P(X \geq \varepsilon) \leq E(X)/\varepsilon$ (ezt nevezik Markov egyenlőtlenségnek).

g(x)=x, X helyett $(X-EX)^2$-re alkalmazva: $P((X-EX)^2 \geq \varepsilon^2) \leq E(X-EX)^2/\varepsilon^2$, ami egyszerűsítve $P(|X-EX| \geq \varepsilon) \leq D^2(X)/\varepsilon^2$ (elnevezés:Csebisev egyenlőtlenség).

Megjegyzés. A fenti egyenlőtlenségek élesek, azaz minden ε-ra megadható olyan valószínűségi változó, amelyre $P(X \geq \varepsilon)=E(X)/\varepsilon$. (Két értéket vesz fel: 0, ε).

Alkalmazások

Az eredmények a gyakorlatban mégsem adnak kellően pontos becslést, mert a tényleges eloszlások tulajdonságait nem veszi figyelembe. Ezért, ha ismerjük az adott változó eloszlását, mindig abból adjuk meg a valószínűségek értékét.

Példa: hányszor kell egy szabályos érmét feldobni, hogy a fejek relatív gyakorisága legalább 0.99 valószínűséggel ne térjen el 0.05-nél jobban 0.5-től? Csebisev egyenlőtlenségből:

$P(|X-0.5| \geq 0.05) \leq D^2(X)/\varepsilon^2 = 400/4n \leq 0.01$ elég, amiből $n \geq 10000$ adódik. A binomiális eloszlásból adódó pontos érték: 670. Szimuláció

Nagy számok törvényei

Legyenek $X_1+X_2+\ldots+X_n$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók. Tegyük fel, hogy $\sigma^2=D^2(X)$ véges ($m:=E(X_i)$). Ekkor minden ε, $\delta>0$-hoz megadható olyan n_0, hogy $n>n_0$ esetén $P(|(X_1+X_2+\ldots+X_n)/n - m| \geq \varepsilon) \leq \delta$.

Bizonyítás. $E(X_1+X_2+\ldots+X_n)/n=m$, és $D^2[(X_1+X_2+\ldots+X_n)/n] = \sigma^2/n$. A Csebisev egyenlőtlenség miatt $P(|(X_1+X_2+\ldots+X_n)/n - m| \geq \varepsilon) \leq \sigma^2/\varepsilon^2 n$, ami 0-hoz tart, azaz elég nagy n-re kisebb lesz δ-nál.

Elnevezés: $(X_1+X_2+\ldots+X_n)/n \to m$ sztochasztikusan (az ilyen konvergenciát bizonyító tételeket gyenge tételnek nevezzük).

Megjegyzések.

A tétel feltételei gyengíthetőek: elég, ha a független, azonos eloszlású változók várható értéke véges.

Az állítás is erősíthető: 1 valószínűségű konvergencia is bizonyítható (ez azt jelenti, hogy

$$P\{\omega: (X_1+X_2+\ldots+X_n)/n \to m\} = 1.$$

Ha $\Omega=[0,1]$ és P(A) az A "hossza", akkor az 1 valószínűségű konvergencia lényegében a szokásos pontonkénti konvergencia. Ez nem következik a sztochasztikus konvergenciából:

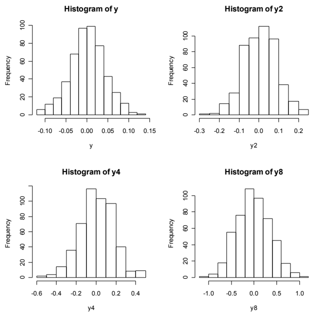
Legyen pl. $X_{2^n+k}(z)=1$, ha $k/2^n<z<(k+1)/2^n$ és 0 különben. Ekkor $X_n \to 0$ sztochasztikusan, de $P\{z: X_n \to 0\} = 0$

Bernoulli tétele

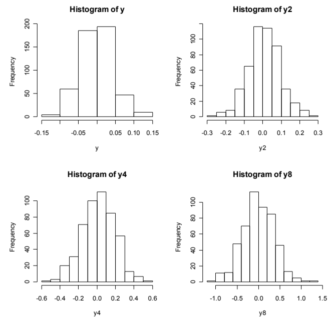
A nagy számok törvényének legelső verzióját még Bernoulli bizonyította, indikátorváltozókra: eszerint azonos körülmények között elvégzett független kísérleteknél tetszőleges esemény relatív gyakorisága tart az esemény valószínűségéhez. (Az előző speciális esete: X indikátorváltozó.)

Szimuláció

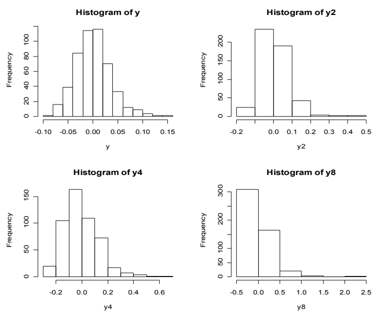
Független, std. normális eloszlású megfigyelések átlaga (n=512,128,32,8)



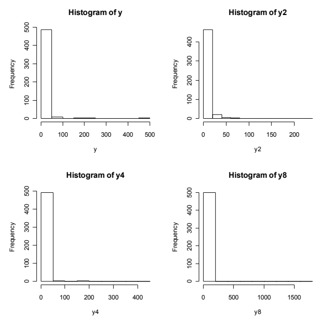
Független, azonos, egyenletes eloszlású megfigyelések átlaga (m=0, σ=1, n=512,128,32,8)



Független, azonos, Pareto (k=3) eloszlású megfigyelések átlaga (n=512,128,32,8)



Független, azonos, Pareto (k=1) eloszlású megfigyelések átlaga (n=512,128,32,8)



9. előadás

Nagy számok törvényei

Legyenek $X_1+X_2+\ldots+X_n$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók. Tegyük fel, hogy $\sigma^2=D^2(X)$ véges ($m:=E(X_i)$). Ekkor minden ε, $\delta>0$-hoz megadható olyan n_0, hogy $n>n_0$ esetén $P(|(X_1+X_2+\ldots+X_n)/n - m| \geq \varepsilon)\leq\delta$.

Elnevezés: $(X_1+X_2+\ldots+X_n)/n \to m$ sztochasztikusan (az ilyen konvergenciát bizonyító tételeket gyenge tételnek nevezzük).

Az állítás erősíthető: 1 valószínűségű konvergencia is bizonyítható (ez azt jelenti, hogy

$$P\{\omega: (X_1+X_2+\ldots+X_n)/n \to m\} =1.$$

Összefüggő változók

Valami feltétel kell: $X_1=X_2=\ldots=X_n$ esetén $(X_1+X_2+\ldots+X_n)/n = X_1$ és így nem konvergál konstanshoz.

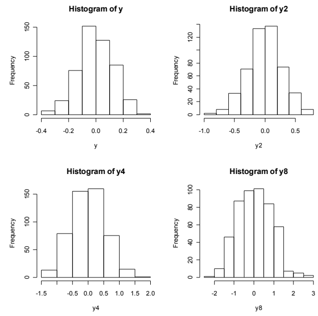
Tétel (Bernstein). Legyen $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ olyan, hogy $D^2(X_1)+D^2(X_2)\ldots+D^2(X_n)<kn$, valamint tegyük fel, hogy van olyan $h:\boldsymbol{N}\to\boldsymbol{R}_+$ függvény, melyre

$|R(X_i,X_j)|\le h(|i-j|)$ és

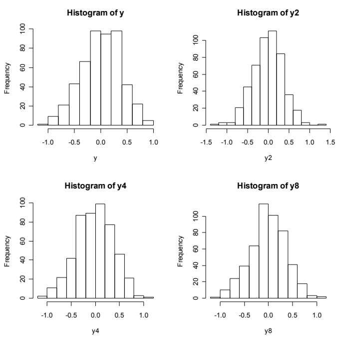
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(i) \to 0$$

ekkor $(X_1+X_2+\ldots+X_n)/n - (m_1+m_2+\ldots+m_n)/n \to 0$ sztochasztikusan.

Összefüggő (de x_{t+10} és x_t már független), azonos, std. normális eloszlású megfigyelések átlaga (n=512,128,32,8)



Független, egyenletes eloszlású megfigyelések átlaga ($m=0$, $\sigma_j=j$, n=512,128,32,8)



Összefoglalás

A konvergencia sebessége a független esetben a szórásnégyzettől függ.

Összefüggő esetben pedig a korreláció a döntő.

A törvény nem jelenti azt, hogy az eddig nem szerepelt értékek a jövőben a vártnál gyakoribbak lesznek, hanem csupán az eloszlás szerint kapott nagyszámú érték állítja helyre a várt gyakoriságokat.

Műveletek eseményekkel

Legyenek $A_1,\ldots$ események.

limsup A_n : végtelen sok A_n–hez tartozó elemi események. Formálisan:

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

liminf A_n : Azon elemi események, amelyek véges sok kivételével minden A_n–ben benne vannak.

$$\liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

Borel-Cantelli lemma

Ha $A_1, A_2,\ldots$ események és $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) < \infty$ akkor $P(\limsup A_n)=0$.

Bizonyítás.

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \lim_{n\to\infty} C_n$$

ahol

$$C_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, C_n \supseteq C_{n+1}\cdots$$

Ebből

$$P(\limsup A_n) = P(\lim_{n\to\infty} C_n) = \lim_{n\to\infty} P(C_n) \le \lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = 0$$

B-C lemma megfordítása

Kellenek feltételek: $\Omega=[0,1]$, $A_n=[0,1/n]$
P="hosszúság" esetén P(lim sup A_n)=0, de

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \infty$$

Ha viszont az események függetlenek, akkor megfordítható (2. B-C lemma): ekkor

$\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \infty$ esetén P(limsup A_n)=1.

$$P(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) = \lim_{m\to\infty} P(\bigcup_{k=n}^{m} A_k) = 1 - \lim_{m\to\infty} P(\bigcap_{k=n}^{m} \overline{A}_k)$$

$$= 1 - \lim_{m\to\infty} \prod_{k=n}^{m} (1 - P(A_k)) \geq 1 - \lim_{m\to\infty} \exp\{-\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)\} \to 1$$

Nagy számok erős törvénye

Legyen $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású *m* várható értékkel. Tegyük fel, hogy $E(X^4)$ véges. Ekkor

$$P\left(\left\{\omega : \frac{X_1(\omega) + X_2(\omega) + \ldots + X_n(\omega)}{n} \underset{n\to\infty}{\to} m\right\}\right) = 1$$

azaz $(X_1+X_2+\ldots+X_n)/n \to m$ 1 valószínűséggel.

Megjegyzés: a tétel állítása már abból is következik, hogy *m* véges (de a bizonyítás sokkal nehezebb erre az esetre).

Bizonyítás.

$$E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)\right]^4 = nE\left[(X_1 - m)^4\right] + 6\binom{n}{2}\left(E(X_1 - m)^2\right)^2 \leq cn^2$$

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)\right| > n\varepsilon\right) \leq \frac{E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)\right]^4}{(n\varepsilon)^4} \leq \frac{cn^2}{(n\varepsilon)^4} = \frac{c'}{n^2}$$

amiből a Borel-Cantelli lemma miatt $P(A_\varepsilon)=0$, ahol

$$A_\varepsilon = \limsup\left\{\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} - m\right| > \varepsilon\right\} \qquad P\left\{\omega : \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i(\omega)}{n} - m \to 0\right\} = 1 - P\left(\bigcup_k A_{1/k}\right) = 1$$

Alkalmazások

Korlátos valószínűségi változókra teljesül a nagy számok erős törvénye.
Kérdés: lehet-e nemelfajult valószínűségi változó a határérték?

Tétel: ha $X_1, X_2, \ldots$ független valószínűségi változók, b_n számsorozat, melyre $b_n \to\infty$ és $(X_1+X_2+\ldots+X_n)/b_n \to X$ 1 valószínűséggel, akkor X 1 valószínűséggel állandó.

Tétel. Ha $X_1, X_2, \ldots$ független valószínűségi változók, b_n számsorozat, melyre $b_n \to\infty$ 1 valószínűséggel, és $(X_1+X_2+\ldots+X_n)/b_n \to X$ sztochasztikusan, akkor X 1 valószínűséggel állandó.

A bizonyítás ötlete: sztochasztikusan konvergens sorozatnak mindig kiválasztható 1 valószínűséggel konvergens

Gyenge konvergencia

Definíció. $X_n \to X$ gyengén, ha az eloszlásfüggvényeikre teljesül: $F_n(z) \to F(z)$ az F minden folytonossági pontjában.

Megjegyzés. Ez a konvergencia nem mond semmit a valószínűségi változók közelségéről. $\Omega=[0,1]$, P="hosszúság", $X_n=I_{[0,0.5]}$ $X=I_{[0.5,1]}$ esetén $F_n(z)=F(z)$, azaz teljesül a gyenge konvergencia.
A fentiekből az is látszik, hogy a határértéknek csak az eloszlása érdekes.

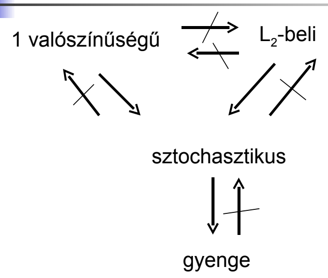
Tulajdonságok

Azt nem célszerű megkövetelni, hogy F minden pontjában teljesüljön a konvergencia:
$X_n=\delta_{-1/n}$ esetén $X_n \to X=\delta_0$ 1 valószínűséggel. $F_n(0)=1$, de $F(0)=0$ (F balról folytonos). A többi pontban teljesül a konvergencia: $F_n(z) \to 0$, ha $z<0$, $F_n(z)=1$, ha $z>0$.
Ha $X_n \to X$ sztochasztikusan, akkor $X_n \to X$ gyengén is.

Def. $X_n \to X$ L_2-ben, ha $E(X_n-X)^2 \to 0$ $(n\to\infty)$.

A Csebisev egyenlőtlenség értelmében az L_2 -beli konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia. (A nagy számok gyenge törvényeinél

Konvergenciafajták összefoglalása



Összeg gyenge konvergenciája

Probléma: konvolúció eloszlásfüggvényét bonyolult képlet adja meg.

Segédeszköz kellene: amivel egyszerűen kezelhető a konvolúció, és amire a gyenge konvergencia is kezelhető.

Generátorfüggvény

Legyen X nemnegatív egész értékű valószínűségi változó. A generátorfüggvénye $g_X(z):=E(z^X)=P(X=0)+zP(X=1)+z^2P(X=2)+\ldots$

Tulajdonságai:

- Véges, ha $|z|\leq 1$
- Meghatározza az X eloszlását:
  - $P(X=0)=g_X(0)$
  - $P(X=1)=g_X'(0)$
  - $P(X=2)=g_X''(0)$ stb.
- Ha X és Y függetlenek, nemnegatív egész értékűek: $g_{X+Y}(z)=g_X(z)g_Y(z)$, mert $E(z^{X+Y})=E(z^Xz^Y)=E(z^X)E(z^Y)$ a függetlenség miatt.

Példák

Elfajult eloszlásra: $g_X(z)=z^k$.

Indikátorváltozóra $g_X(z)=pz+1-p$

Binomiális eloszlásra $g_X(z)=(pz+1-p)^n$

Poisson eloszlásra

$$E(z^X)=\sum_{k=0}^{\infty} z^k\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=e^{-\lambda}e^{\lambda z}=e^{\lambda(z-1)}$$

Karakterisztikus függvény

Komplex értékű valószínűségi változók: $Z=X+iY$, ahol X és Y is valószínűségi változók.

$E(Z):=E(X)+iE(Y)$.

X (valós) valószínűségi változó karakterisztikus függvénye: $\varphi_X(t):=E(e^{itX})=E(\cos tX)+iE(\sin tX)$

Tulajdonságai:

- $\varphi_X(t)$ $\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{C}$ függvény, mely minden X-re létezik.
- $\varphi_X(0)=1$ minden X-re
- $|\varphi_X(t)|\leq 1$ (mert $|E(e^{itX})|\leq E(|e^{itX}|)=1$
- Ha X és Y függetlenek, $\varphi_{X+Y}(t)=\varphi_X(t)\varphi_Y(t)$, mert $E(e^{it(X+Y)})=E(e^{itX}e^{itY})=E(e^{itX})E(e^{itY})$ a függetlenség miatt

Példák

Elfajult eloszlásra (X=c 1 valószínűséggel): $\varphi_X(t)=E(e^{itX})=E(\cos tc)+iE(\sin tc)=\cos tc+i\sin tc=e^{itc}$.

Indikátor változóra:

$\varphi_X(t)=E(e^{itX})=(1-p)+pe^{it}$.

Binomiális eloszlásra:

$\varphi_X(t)=E(e^{itX})=((1-p)+pe^{it})^n$.

Poisson eloszlásra:

$$E(e^{itX})=\sum_{k=0}^{\infty} e^{itk}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

További tulajdonságok

Ha Y=aX+b, akkor $\varphi_Y(t)= e^{ibt}\varphi_X(at)$

Bizonyítás: $\varphi_Y(t)= E(e^{i(aX+b)t})= e^{ibt} E(e^{iaXt})= e^{ibt}\varphi_X(at)$.

Kiszámítása az abszolút folytonos esetre:

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) f(x)dx + i\int_{-\infty}^{\infty} \sin(tx) f(x)dx$$

Példa. Ha X egyenletes eloszlású a [-1,1] intervallumon, akkor

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{\cos(tx)}{2} dx = \left[\frac{\sin tx}{2t}\right]_{-1}^{1} = \frac{\sin t}{t}$$

Általában is: φ_X valós, ha X eloszlása szimmetrikus a 0-ra.

A standard normális eloszlás karakterisztikus függvénye

Áll.: a standard normális eloszlás karakterisztikus függvénye:

$$\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Ehhez: eleget tesz a $\psi'(t)=-t\,\psi(t)$ differenciálegyenletnek. (Ez lényegében elég is: $(\log \psi(t))'=-t$, amiből $\log \psi(t)=-t^2/2+c$, de $\psi(0)=1$ miatt c=1.)

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx;\ \psi'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} -x \sin(tx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$\psi'(t) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\sin(tx) e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t\cos(tx) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -t\psi(t)$$

parciális integrálással.

További tulajdonságok

A karakterisztikus függvény meghatározza az eloszlást (azaz különböző eloszlásokhoz különböző karakterisztikus függvény tartozik).

Taylor sorfejtés: tegyük fel, hogy $E(X^n)$ véges valamilyen $n \geq 1$ egész számra. Ekkor $t \to 0$ mellett

$$\varphi_X(t) = 1 + \frac{it}{1!} E(X) + \frac{(it)^2}{2!} E(X^2) + \ldots + \frac{(it)^n}{n!} E(X^n) + o(t^n)$$

ahol $o(t^n)$ jelentése, hogy t^n–nel osztva is 0-hoz tart, ha $t \to 0$.

Bizonyítás ötlete: a tétel feltétele esetén $\varphi_X(t)$ n-szer egyenletesen folytonosan deriválható és

$$\varphi_X^{(l)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} (ix)^l f(x)dx$$

További tételek

Azaz $\varphi_X^{(k)}(0)= i^k E(X^k)$ és így a szokásos Taylor-sorfejtésből adódik a tétel.

Ha φ karakterisztikus függvény, akkor egyenletesen folytonos.

Folytonossági tétel. Legyen φ_n karakterisztikus függvények egy sorozata (jelölje Q_n a hozzá tartozó eloszlást). Ha φ_n pontonként konvergál egy φ-hez, mely a 0-ban folytonos, akkor φ is karakterisztikus függvény, és a hozzá tartozó eloszlás éppen a eloszlások Q gyenge határértéke.

Centrális határeloszlás tétel

Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók. Tegyük fel, hogy $\sigma^2=D^2(X)$ véges ($m:=E(X_i)$). Tekintsük a standardizált összegüket:

$$Z_n := \frac{X_1 + \ldots + X_n - nm}{\sqrt{n}\sigma}$$

Ekkor Z_n gyengén konvergál a standard normális eloszláshoz, azaz

$$P\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} < z\right) \to \Phi(z)$$

ahol Φ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye.

Bizonyítás vázlata

Elegendő a Z_n karakterisztikus függvényére belátni, hogy $\varphi_n(t) \to \exp\{-t^2/2\}$.

Ha $\psi(t)$ jelöli az $X_n - m$ karakterisztikus függvényét, akkor $X_1+X_2+\ldots+X_n-nm$ karakterisztikus függvénye $\psi^n(t)$. Ebből

$$\varphi_n(t) = \left(\psi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)^n$$

A maradéktagos Taylor formula miatt

$$\psi(t) = 1 + it\frac{E(X-m)}{1!} + i^2t^2\frac{E(X-m)^2}{2!} + o(t^2) = 1 - \frac{\sigma^2}{2}t^2 + o(t^2)$$

Bizonyítás befejezése

$$\varphi_n(t) = \left(\psi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2 + o\left(\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2\right)\right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + \frac{1}{n}o(1)\right)^n \to e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Megjegyzés. A tételt tulajdonképpen már megfigyeltük a szimulációknál.
Példák:
•egyenletes eloszlás
gamma eloszlás

A nem azonos eloszlású eset

Ekkor – a nagy számok törvényénél már látott okok miatt – erősebb feltételek kellenek.
A legegyszerűbb eset: ha $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ független, egyenletesen korlátos valószínűségi változók (ekkor $\sigma_i^2 = D^2(X_i)$ véges, $m_i := E(X_i)$), akkor a standardizált összegük:

$$Z_n := \frac{X_1 + \ldots + X_n - (m_1 + \ldots + m_n)}{\sqrt{\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2}}$$

Ekkor Z_n gyengén konvergál a standard normális eloszláshoz, azaz

$$P(Z_n < z) \to \Phi(z)$$

ahol Φ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye.

Konvergenciasebesség

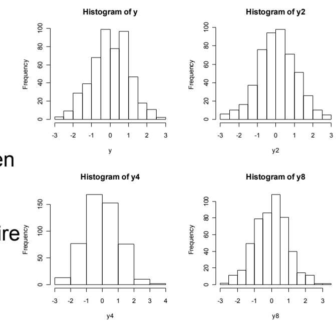
Ha $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, t.f.h. m=0, σ=1, akkor

$$\sup_z \left| P\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} < z\right) - \Phi(z)\right| \le c\,\frac{E|X_1|^3}{\sqrt{n}}$$

(Berry-Esséen tétel).
Gyakorlatban nagyon függ az eloszlás alakjától. Például az egyenletes eloszlásra n=12 elég jó közelítést ad, de az exponenciális eloszlásnál n=50 szükséges.

Centrális határeloszlás-tétel: független, azonos, egyenletes eloszlások standardizált összege (n=512,128,32,8)

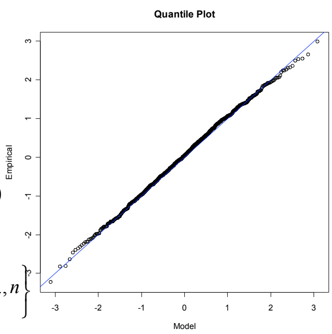
Itt és a következő oldalakon az adott n számú véletlen számot generáltuk, standardizáltuk az összegüket, és ezt 500-szor megismételtük minden esetben. Ezek után azt vizsgáltuk, hogy a kapott 500 véletlen szám mennyire van közel a standard normális eloszláshoz.



Eloszlás illeszkedésének vizsgálata: Q-Q plot

A megfigyelt és az illesztett eloszlás kétdimenziós ábrázolása.
Eloszlásfüggvény q-kvantilise: az az érték, amelynél q valószínűséggel kapunk kisebbet: $G^{-1}(q)$
Spec.: q=1/2: medián

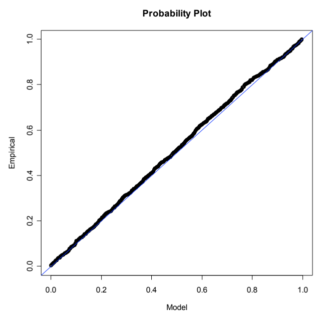
$$\left\{\left(G^{-1}\left(\frac{n-k+1}{n+1}\right), X_k^{(n)}\right) : k = 1,2,\ldots,n\right\}$$



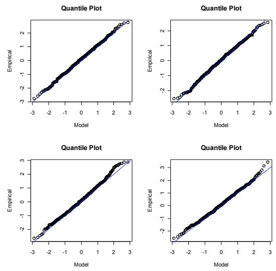
Eloszlás illeszkedésének vizsgálata: P-P plot

A megfigyelt és az illesztett eloszlás kétdimenziós ábrázolása

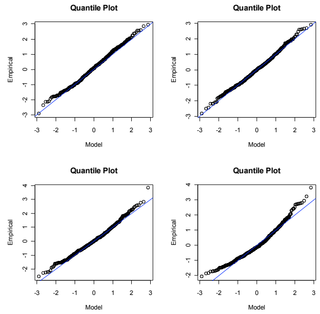
$$\left\{\left(\frac{n-k+1}{n+1}, G(X_k^{(n)})\right) : k = 1,2,\ldots,n\right\}$$



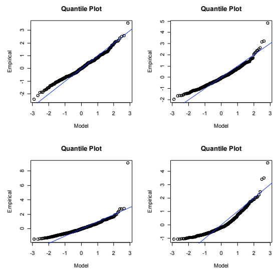
Centrális határeloszlás-tétel: független, azonos, egyenletes eloszlások standardizált összege (n=512,128,32,8)



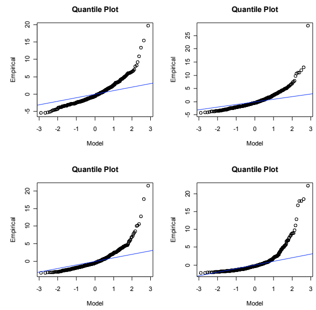
Centrális határeloszlás-tétel: független, azonos, exponenciális eloszlások standardizált összege (n=512,128,32,8)



Centrális határeloszlás-tétel: független, azonos, Pareto (k=3) eloszlások standardizált összege (n=512,128,32,8)



Centrális határeloszlás-tétel: független, azonos, Pareto (k=2) eloszlások standardizált összege (n=512,128,32,8)



10. előadás

Centrális határeloszlás tétel

Legyenek X_1, X_2,…, X_n,… független, azonos eloszlású valószínűségi változók. Tegyük fel, hogy $\sigma^2=D^2(X)$ véges ($m:=E(X_i)$). Tekintsük a standardizált összegüket:

$$Z_n := \frac{X_1 + \ldots + X_n - nm}{\sqrt{n}\sigma}$$

Ekkor Z_n gyengén konvergál a standard normális eloszláshoz, azaz

$$P\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} < z\right) \to \Phi(z)$$

ahol Φ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye.

Általánosítások

Ha nem azonos eloszlásúak a tagok, további feltételekre (pl. magasabb momentumok létezése, hasonló nagyságrendű összeadandók) van szükség.

Gyenge, a Bernstein tételben látott összefüggőség esetére is általánosítható a tétel.

Stabilis eloszlások

A normális eloszlás kitüntetett szerepe azon alapult, hogy teljesítette az ún. *stabilitást*: ha X,Y független, F eloszlásfüggvényűek, akkor tetszőleges a,b esetén megadhatók α β számok, hogy aX+bY eloszlásfüggvénye $F(\alpha z+\beta)$. (Azaz aX+bY ugyanabba az eloszláscsaládba tartozik, mint az összeadandók.)

Belátható, hogy független, azonos eloszlású változók összegének normálás utáni határeloszlása csak stabilis lehet. Ugyanakkor minden ilyen stabilis eloszlás elő is áll határeloszlásként.

A centrális határeloszlás tétel következménye, hogy nincs más véges szórású stabilis eloszlás. Ugyanakkor nem véges szórású van: pl. a Cauchy eloszlás, melynek sűrűségfüggvénye $f(x)=1/\pi(1+x^2)$

A centrális határeloszlás tétel lokális változata

Legyenek $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók. Tegyük fel, hogy $\sigma^2=D^2(X)$ véges ($m:=E(X_i)$) valamint, hogy abszolút folytonosak, szakaszonként folytonos sűrűségfüggvénnyel. Tekintsük a standardizált összegüket (Z_n) és tegyük fel, hogy legalább egy n-re Z_n sűrűségfüggvénye korlátos. Ekkor a Z_n változó f_n sűrűségfüggvénye (mely a tagok abszolút folytonossága miatt létezik) konvergál a standard normális eloszlás sűrűségfüggvényéhez, azaz

$$f_n(t) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Az indikátorváltozók esete

Tétel (Moivre-Laplace) Legyenek $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ független, azonos p paraméterű indikátorváltozók. Ekkor $Y=X_1+X_2+\dots+X_n$ binomiális eloszlású (n,p) paraméterrel.

$$P(Y=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2np(1-p)}}$$

A közelítés egyenletesen jó olyan k értékekre, melyek legfeljebb (np(1-p)) –vel térnek el np-től (azaz a binomiális eloszlás centrális tagjai jól közelíthetőek a megfelelő normális eloszlás sűrűségfüggvényével).

binomiális eloszlás

Összeg viselkedése

Tétel (Stein). Legyen $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változó, hogy $P(|X|>0)>0$. Ekkor tetszőleges $0<a,b$ esetén

$$N := \min\{n : X_1 + X_2 + \dots + X_n > b \text{ vagy } X_1 + X_2 + \dots + X_n < -a\}$$

az N valószínűségi változó 1 valószínűséggel véges, sőt $E(N^k)<\infty$

Bizonyítás. Létezik $\varepsilon>0$, hogy $P(|X|>\varepsilon)>0$. Ekkor $r=(a+b)/\varepsilon$ olyan, hogy $P(|X_1+X_2+\dots+X_r|>a+b)>0$.

Bizonyítás befejezése

Innen r hosszú blokkokra osztva vizsgáljuk az összeget. A geometriai eloszlás tagjainak 1 az összege, azaz teljesül, hogy 1 valószínűséggel lesz egy olyan blokk, amely abszolút értékben legalább a+b. Ez viszont azt jelenti, hogy vagy a megelőző összeg, vagy az ezutáni összeg kívül esik a [–a,b] intervallumon.

Mivel az N értékét geometriai eloszlással becsültük, az $E(N^k)$ étéke is becsülhető a geometriai eloszlás megfelelő momentumával, ami véges.

Véletlen bolyongás

$S_n = X_1+X_2+\ldots+X_n$ a bolyongást végző „részecske” helyzete n lépés után. A lépések egymástól függetlenek.

$$X_i = \begin{cases} +1 & p \text{ valószínűséggel} \\ -1 & 1\text{-}p \text{ valószínűséggel} \end{cases}$$

Tipikusan p=1/2 (szimmetrikus bolyongás)

Stein tétele értelmében minden korlátos intervallumból kilép a bolyongás.

Példa: X_i az i-dik érmedobásnál a nyereményünk (1 Ft-ot nyerünk, ha fej, 1Ft-ot vesztünk, ha írás), S_n pedig az össznyereményünk n játék után.

A tükrözési elv

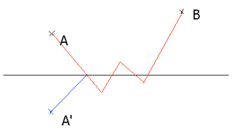
Előbb: szimuláció

A,B egész koordinátájú pontok az x≥0 félsíkon. A-ból B-be vezető út: olyan trajektória, melyet a véletlen bolyongás be tud járni.

Tükrözési elv: legyen A és B az x tengely azonos oldalán levő két pont. Jelölje A’ az A tükörképét az x tengelyre. Ekkor az A- ból B-be vezető azon utak száma, amelyeknek az x tengellyel van közös pontjuk, megegyezik az A’-ből B-be vezető utak számával.

Bizonyítás.

Az A→B tengelyt metsző útnál tükrözzük az x tengelyre az első metszéspontig terjedő szakaszt. Így egy A’→B utat kapunk. A megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű, tehát a két típusú utak száma azonos.
Az (1,1) pontból az (a+b,a-b) pontba vezető jó utak száma:



$$\frac{\binom{a+b-1}{a-1}-\binom{a+b-1}{a}}{\binom{a+b}{a}}$$

Elemi valószínűségek

Legyen $q_{2n,2k}=P(S_{2n}=2k)$. Megállapodás szerint $S_0=0$, így $q_{0,0}=1$.

$$q_{2n,2k} = \binom{2n}{n+k} 2^{-2n} \quad k = 0,1,2,\ldots n$$

Ballot lemma. Ha két jelölt közül az egyik (A) a db, míg a másik (B) b db szavazatot kapott (a>b) akkor annak a valószínűsége, hogy az A végig vezetett, (a-b)/(a+b). A szimmetrikus bolyongás jelöléseivel ez

$$P(S_1 > 0, S_2 > 0, \ldots \mid S_{a+b} = a-b) = \frac{a-b}{a+b}$$

szimuláció

Az origóba való visszatérés

u_{2k}: annak valószínűsége, hogy a részecske 2k lépés után az origóban van.

$$u_{2k} = \binom{2k}{k}\frac{1}{2^{2k}}$$

Legyen t az origóba való első visszatérés időpontja:

$$t = \min\{k : 0 < k, S_k = 0\}$$

f_{2k} annak a valószínűsége, hogy először a 2k időpontban tér vissza az origóba (k>0): $f_{2k}=P(t=2k)$.

Ezek egymást kizáró események, így $f_2+f_4+f_6+\ldots \le 1$.

Az első visszatérés eloszlása

Állítás. $P(S_1\neq 0,\ldots, S_{2n}\neq 0)=P(S_{2n}=0)$

Biz. ötlet: bontsuk fel a pozitív utakat a végpont szerint és alkalmazzuk a Ballot lemmánál látott leszámlálást.

Ebből $f_{2n}= u_{2n-2}-u_{2n} = u_{2n}/(2n-1)$, amiből adódik, hogy a bolyongás 1 valószínűséggel visszatér.

f_{2n} nagyságrendje: $cn^{-3/2}$, ami miatt az origóba való visszatérés időpontjának nem véges a várható értéke.

Utolsó visszatérés

A bolyongást 2n-ig vizsgálva, annak valószínűsége, hogy a részecske a 2k-dik időpontban tér vissza utoljára az origóba:

$$u_{2k}u_{2n-2k} = \frac{\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}}{2^{2n}} \approx \frac{1}{\pi\sqrt{k(n-k)}}$$

ha k és n is nagy. Ennek a függvénynek az n/2–ben minimuma van és szimmetrikus is n/2-re.

szimuláció

11. előadás

Szimmetrikus bolyongás: ism.

Legyen $q_{2n,2k}=P(S_{2n}=2k)$. Megállapodás szerint $S_0=0$, így $q_{0,0}=1$.

$$q_{2n,2k} = \binom{2n}{n+k}2^{-2n} \quad k = 0,1,2,\ldots n$$

Ballot lemma. Ha két jelölt közül az egyik (A) a db, míg a másik (B) b db szavazatot kapott (a>b) akkor annak a valószínűsége, hogy az A végig vezetett, (a-b)/(a+b). A szimmetrikus bolyongás jelöléseivel ez

$$P(S_1 > 0, S_2 > 0, \ldots \mid S_{a+b} = a-b) = \frac{a-b}{a+b}$$

szimuláció

Az (1,1) pontból az (a+b,a-b) pontba vezető jó utak száma: $\dfrac{\binom{a+b-1}{a-1}-\binom{a+b-1}{a}}{\binom{a+b}{a}}$

A vezetés aránya

Állítás. Annak a valószínűsége, hogy a [0,2n] időintervallumból 2k egységnyi a pozitív oldalon és 2n-2k egységnyi a negatív oldalon van: $u_{2k}u_{2n-2k}$.($S_{2k}=0$ pontosan akkor pozitív, ha $S_{2k-1}>0$.)

Bizonyítás. Teljes indukcióval. n=1 triviális. Ha 0<2k<2n lépést tölt a pozitív oldalon, akkor az első visszatérés 2r<2n lépés után következett be. Ha eddig a pozitív oldalon volt, akkor a hátralévő időből 2k-2r, míg egyébként 2k egységnyit tölt a pozitív oldalon. Ebből a keresett valószínűségre

$$b_{2k,2n} = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k} f_{2r}b_{2k-2r,2n-2r} + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n-k} f_{2r}b_{2k,2n-2r}$$

ahonnan az indukciós feltevés értelmében

$$b_{2k,2n} = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k} f_{2r}u_{2k-2r}u_{2n-2k} + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n-k} f_{2r}u_{2k}u_{2n-2r-2k}$$

Többdimenziós véletlen bolyongás

Kétdimenzióban:

- Lehetséges lépések a tengelyek irányában: ¼-¼ valószínűséggel.
- Itt is 1 valószínűségű a visszatérés.

Három dimenzióban:

- Lehetséges lépések a tengelyek irányában: 1/6-1/6 valószínűséggel.
- Itt már 1-nél kisebb valószínűségű a visszatérés (Pólya tétele).

Markov láncok

Legyen $\underline{X}=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$: $\Omega \to \boldsymbol{I}^n$ diszkrét valószínűségi vektorváltozó.

Eddig a független esetet vizsgáltuk. Most eltekintünk ettől.

$Q_X(\underline{k}):=P\{\omega: \underline{X}(\omega)= \underline{k}\}$ az *X eloszlása* $\boldsymbol{I}^d$ elemein.Reális, de a függetlenségnél gyengébb feltételt keresünk.

Tegyük fel, hogy $P(X_m = k_m)$ valószínűségeket megadásához elegendő az X_{m-1} értéket ismerni. Azaz

$P(X_m = k_m \mid X_i = k_i$ minden $1 \le i \le m-1$-re$)=$

$P(X_m = k_m \mid X_{m-1} = k_{m-1})$ (Markov tulajdonság). Azaz a Markov lánc következő értékének eloszlását meghatározza *a* lánc jelenlegi állapota

Példák

Ha az $\underline{X}=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$: $\Omega \to \boldsymbol{I}^n$ diszkrét valószínűségi vektorváltozó koordinátái függetlenek, akkor a sorozat Markov lánc.

Ha $X_n=X_{n-1}+Y_n$ ahol Y_n és X_{n-1} független, akkor X_n Markov lánc.

További egyszerűsítés: tegyük fel, hogy a $P(X_m = k_m | X_{m-1} = k_{m-1})$ átmenetvalószínűségek nem függnek m-től (homogén Markov lánc). Jelölés: p_{ij}:=$P(X_m = j | X_{m-1} = i)$ átmenetvalószínűség-mátrix.

A hőmérséklet napi értéke feltehetően nem homogén Markov lánc, mert ha ma 10 fok volt, akkor ha nyár van, akkor holnap inkább melegebb lesz, míg télen inkább hidegebb.

Többlépéses átmenetvalószínűségek

$P(X_m = j | X_{m-2} = i)$ kiszámítása:

$$P(X_m = j \mid X_{m-2} = i) = \sum_{k\in I} P(X_m = j \mid X_{m-1} = k) P(X_{m-1} = k \mid X_{m-2} = i)$$

(elnevezés: Chapman-Kolmogorov egyenlet).

azaz a $P^{(2)}$ kétlépéses átmenetvalószínűség-mátrixra $P^{(2)} = P^2$ (mátrix-hatvány). Ugyanígy a k-lépésesre $P^{(k)} = P^k$.

Példa: a szimmetrikus bolyongásnál $p_{i,i+1}= p_{i,i-1} =1/2$, a többi j-re $p_{i,j}=0$. Ebből a kétlépéses átmenetvalószí-nűségek: $p_{i,i+2}= p_{i,i-2} =1/4$, $p_{i,i} =1/2$, a többi j-re $p_{i,j}=0$

Tulajdonságok

P minden elemére $p_{i,j} \geq 0$.

$$\sum_{j\in I} p_{k,j} = \sum_{j\in I} P(X_m = j \mid X_{m-1} = k) = 1$$

A fenti tulajdonságok P^k-ra is igazak.

Az i-ből a j elérhető (i→j), ha van olyan k, melyre $p_{i,j}^{(k)} > 0$.

Az i-és a j állapotok érintkezőek, ha i→j és j→i.

Az állapotok (I elemei) osztályozhatóak aszerint, hogy érintkezőek-e.

Példák

A szimmetrikus bolyongásnál bármely két állapot érintkező.

Az elnyelő falas bolyongásnál (addig játszunk, míg vagy a –a pontba vagy a b pontba nem jutunk), a két végállapot csak önmagával érintkezik.

A populációs modelleknél (I a populáció egyedszáma) a 0 csak önmagával érintkezik.

További definíciók

A Markov lánc irreducibilis, ha csak egy osztályból áll.

$f_i^{(k)}$:=$P(X_k=i, X_{k-1}\neq i, X_{k-2}\neq i,\ldots, X_1\neq i | X_0=i)$ az i-be való első visszatérés valószínűsége.

$p_i^{(k)}$:=$P(X_k=i | X_0=i)$ az i-be való, k-lépésben történő visszatérés valószínűsége.

Az i állapot visszatérő, ha $\sum_k f_i^{(k)} = 1$

Az i állapot periódusa d, ha d=lnko{k: $p_i^{(k)}>0$}.

A visszatérőség és a periódus is osztálytulajdonság.

Stacionér eloszlás

Ha megadható olyan π eloszlás az állapottéren, melyre teljesül, hogy $\pi P=\pi$, akkor ezt a Markov lánc stacionér eloszlásának nevezzük. Lineáris egyenletrendszer megoldásaként kaphatjuk meg.

Nem irreducibilis esetben nem egyértelmű.

Ha teljesül, hogy tetszőleges X_0 kiinduló eloszlás esetén az X_n eloszlása konvergál a stacionér eloszláshoz, akkor azt mondjuk, hogy a Markov-lánc ergodikus.

Ergodikus láncok

- Tétel. Ha a Markov-lánc aperiodikus (d=1), irreducibilis és van olyan n, hogy P^n-nek van csupa pozitív elemből álló oszlopa, akkor a Markov-lánc ergodikus.
- A konvergencia általában meglehetősen gyors, bár függ a kiinduló eloszlástól.
- Ergodikus esetben a π funkcionáljai (pl. $E\pi$) közelíthetőek a tapasztalati értékeivel:

$$f(\pi) \approx \sum_{i=1}^{n} f(X_i)/n$$

Csemegék

- Bolyongás szimuláció még egyszer
- Tűzvész
- Tönkremenési probléma

Minta-vizsgadolgozat

- Az első vizsga időpontja: június 7 kedd, 10.00-12.30, Bolyai terem
- További vizsgák várhatóan: június 23, június 29, július 5