Házi feladat

Sebestyén Gábor (segabor@elte.hu)

1. feladat: számoljuk meg az {1, 2, 3, 4, 5} számhalmaz fixpontmentes permutációit.

A feladatot logikai szita formulával oldottam meg, komplementer módon, azaz az összes permutáció számából levonom a fixpontos permutációkat. A logikai szita formula alapján veszem az összes olyan permutációt, ahol legalább egy fixpont van (egy pontos esetek uniója), ebből levonom a két fixpontos eseteket (két pontos esetek uniójával metszem), stb..

Legyen $P(A_i)$:=(i. pozíció fixpont)

Az összes eset száma (logikai szita formula felírásával):

$$P\left(\bigcup A_i\right) = \sum (-1)^{k-1} S_k$$

ahol S_k általános alakja

$$S_k = \binom{n}{k}(n-k)!$$

A konkrét feladatban n=5 esetén az összes ilyen eset:

$$5! - \sum_{k=1}^{5}\binom{5}{k}(5-k)! = 5! - \left[\frac{5!}{1!4!}4! - \frac{5!}{2!3!}3! + \frac{5!}{3!2!}2! - \frac{5!}{4!1!} + 1\right] = 120 - [120 - 60 + 20 - 5 + 1] = 120 - 76 = 44$$

2. feladat: adott egy k gyerekes család (k legalább 1) és 3 feltétel:

I. **A(k) = (a családban legfeljebb egy lány van)**
II. **B(k) = (minden gyermek egyforma nemű)**
III. **C(k) = (legalább egy gyerek fiú)**

a., Milyen k esetén lesz A és B független?

$\Omega = \{F, L\}^k, |\Omega| = 2^k$

$$P(A) = \frac{1}{2^k}\left|\bigcup_{i=1}^{k}\{F\ldots F\underset{k}{L}F\ldots F\}\bigcup\{F\ldots F\}\right| = \frac{1}{2^k}(k+1)$$

$$P(B) = \frac{1}{2^k}\left|\{F\ldots F\}\bigcup\{L\ldots L\}\right| = \frac{1}{2^k}2 = \frac{2}{2^k}$$

$$P\left(A\bigcap B\right) = \begin{cases} \left|\{F, L\}\right| = 1 & (k=1) \\ \frac{1}{2^k}\left|\{LF\ldots F\}\bigcup\{F\ldots F\}\right| = \frac{2}{2^k} & (k>1) \end{cases}$$

Tehát nem létezik olyan k természetes szám, amelyre A és B független lenne. k=1 esetén A és B triviálisan nem független, k>1 esetén pedig

$$\frac{2}{2^k}=\frac{1}{2^k}(k+1)\frac{2}{2^k}\Rightarrow 2^k=k+1\Leftrightarrow k=1$$

Ez pedig ellentmondás.

b. Milyen k esetén lesz B és C független?

$$P(C)=\frac{1}{2^k}\left|\Omega\setminus\{L\ldots L\}\right|=1-\frac{1}{2^k}$$

$$P\left(B\bigcap C\right)=\frac{1}{2^k}\left|\{F\ldots F\}\right|=\frac{1}{2^k}$$

Ebben az esetben sem létezik olyan k, amelyre független lenne B és C feltétel. k=1 esetén triviálisan nem független feltételek, k>1 esetén pedig felírva az egyenlőséget:

$$\frac{1}{2^k}=\frac{2}{2^k}\left(1-\frac{1}{2^k}\right)\Leftrightarrow-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2^k}\Leftrightarrow 2=2^k\Leftrightarrow k=1$$

Ez szintén ellentmondás.